

小型无人直升机的姿态与高度自适应反步控制

孙秀云, 方勇纯, 孙 宁

(南开大学 机器人与信息自动化研究所, 天津 300071)

摘要: 针对小型无人直升机的姿态与高度控制问题, 本文提出了一种基于反步法的自适应控制策略. 具体而言, 首先对小型无人直升机的运动学模型进行了等效变换, 使系统中未知参数满足线性参数化条件, 然后应用反步法设计了包含主旋翼挥舞模型的姿态与高度自适应控制器, 并借助Lyapunov方法和芭芭拉定理对闭环系统的稳定性进行了严格的数学分析. 最后, 对该控制器的性能进行了仿真验证, 结果表明在直升机质量和惯性矩阵存在不确定性(未知)的情况下, 该控制算法依然能够取得良好的控制效果.

关键词: 无人直升机; 自适应控制; 反步法; 姿态控制; 高度控制

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Backstepping-based adaptive attitude and height control of a small-scale unmanned helicopter

SUN Xiu-yun, FANG Yong-chun, SUN Ning

(Institute of Robotics and Automatic Information System, Nankai University, Tianjin 300071, China)

Abstract: A backstepping-based adaptive attitude and height controller is proposed for a small-scale unmanned helicopter. The kinetic model of the small-scale unmanned helicopter is equivalently transformed to make the uncertain system parameters satisfy the linear parameterization conditions. The backstepping approach is employed to design the attitude and height adaptive controller including the main rotor flapping model. The stability of the closed-loop system is rigorously proved by Lyapunov techniques and Barbalat's lemma. Numerical simulations are carried out; results demonstrate that the controller can achieve superior performance in the presence of uncertainties in system mass and inertia matrices.

Key words: unmanned helicopter; adaptive control; backstepping; attitude control; height control

1 引言(Introduction)

相对于固定翼无人机而言, 小型无人直升机可以垂直起落, 这种方式省去了对机场和跑道的特定要求, 而且它能够完成定点悬停动作, 因此可以在楼群、山区等复杂环境中飞行. 正是基于这些优点, 小型无人直升机在救援、军事和各种危险场合得到了广泛的应用. 随着计算机与控制技术的高速发展, 国内外许多专家对小型无人直升机的自动控制问题进行了广泛的研究, 并取得了大量的成果^[1-5].

目前, 针对小型无人直升机系统的控制方法主要包括线性方法、非线性方法和智能方法3种. 具体而言, Cai^[6]和Jiao^[7]等分别基于直升机的线性模型设计了小型无人直升机悬停和轨迹跟踪控制器, 但是该线性模型需要对无人直升机的非线性模型在平衡点附近进行线性近似处理, 当系统状态偏离平衡点时, 控制系统的性能就会大打折扣. 为此, 许多学者提出了非线性控制方法, 如Ahmed^[8]和Lee^[9]等分别应用反步法为小型无人直升机设计了飞行控制器, 取得了良好的控制效果. 遗憾的是, 上述方法都是针

对小型无人直升机模型完全已知时得到的结果, 但是不同的负载会引起直升机系统质量的变化(或不确定性), 影响系统的控制效果, 严重时甚至可能导致闭环控制系统不稳定. 除了上述两种方法外, 基于非模型的智能方法也在小型无人直升机上得到了广泛的应用, 如文献[10-12]分别利用模糊智能方法实现了小型无人直升机的飞行控制, 陈欣等^[13]则应用智能比例-积分和单神经元等智能控制方法实现了小型无人机的姿态控制. 这些智能控制方法能取得较好的控制效果, 然而当系统参数发生变化时, 需要对控制规则或控制参数进行重新设置, 且控制系统的稳定性往往得不到数学证明, 缺乏严格的理论依据.

小型无人直升机的姿态直接影响到它的飞行速度和飞行位置, 因此姿态控制是无人直升机飞行控制的基础, 要对直升机进行定点控制或轨迹跟踪控制, 首先要对其姿态控制进行研究. 遗憾的是, 现有的结果大都忽略了主旋翼和副翼的挥舞模型, 当姿态变化速度较快时, 忽略挥舞模型将严重降低无人

机的控制性能. 为此, 本文充分考虑了主旋翼和副翼挥舞带来的影响, 在小型无人直升机的运动学和动力学模型基础上, 分析了主旋翼和副翼的挥舞模型, 应用反步法设计了自适应姿态与高度控制器, 实现了小型无人直升机姿态与高度的良好控制. 具体而言, 该方法首先把运动学模型经过等效变换, 使模型中的未知参数满足线性参数化条件, 然后应用反步法设计了自适应姿态与高度控制器, 它可以对小型无人直升机系统的质量和惯性矩阵等未知参数进行在线估计, 当这些参数发生变化时, 该控制器依然能够保证良好的控制性能. 文中借助Lyapunov方法和芭芭拉定理对控制器的性能做了严格的数学分析, 并进行了仿真验证, 理论分析与仿真结果皆表明本文设计的自适应控制器具有良好的控制性能.

本文的其他部分组织如下: 第2节分析了小型无人直升机的运动学和动力学特性, 并得到了高度与姿态综合模型; 第3节设计了基于反步法的姿态与高度自适应控制器, 并对闭环控制系统进行了稳定性分析; 第4节给出了控制系统的仿真结果; 第5节是对文章主要内容的总结.

2 系统模型(System dynamics)

小型无人直升机系统的模型如图1所示. 其中: $\mathcal{F}_e = \{O_e, x_e, y_e, z_e\}$ 表示惯性坐标系, $\mathcal{F}_b = \{O_b, x_b, y_b, z_b\}$ 表示机体坐标系, Ω_m 为主旋翼旋转角速度, Ω_t 为尾翼旋转角速度, T_m 为主旋翼旋转产生的升力, T_t 为尾翼旋转产生的偏航力, a 和 b 则分别表示小型无人直升机主旋翼的纵向和横向挥舞角.

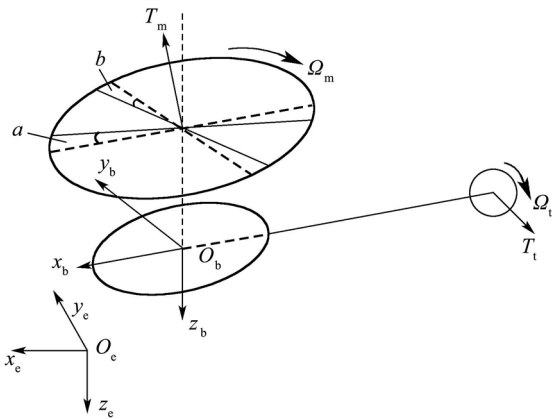


图1 小型无人直升机系统示意图

Fig. 1 Schematic illustration of a small-scale unmanned helicopter

2.1 小型无人直升机动态模型(Dynamic model of a small-scale unmanned helicopter)

一般而言, 小型无人直升机主旋翼的挥舞角很小, 机体与桨盘平面之间的相对位置基本不变. 因此, 机体和桨盘可看作一个刚体, 从而用牛顿-欧拉方程来描述小型无人直升机的模型. 本文采用如下

的小型无人直升机模型^[14]:

$$\dot{\mathbf{P}}_e = \mathbf{V}_e, \quad (1)$$

$$m\dot{\mathbf{V}}_e = \mathbf{R} \cdot \mathbf{f}_b + [0 \ 0 \ mg]^T, \quad (2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{H}\boldsymbol{\omega}_b, \quad (3)$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_b + \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_b = \boldsymbol{\tau}_b, \quad (4)$$

其中: m 表示小型无人直升机系统的总质量, 负载的不同会使得 m 具有不确定性; g 表示惯性坐标系下的重力加速度; $\mathbf{P}_e = [x \ y \ z]^T$, $\boldsymbol{\eta} = [\phi \ \theta \ \psi]^T \in \mathbb{R}^3$ 分别表示惯性坐标系中直升机位置向量和姿态向量; $\mathbf{V}_e = [V_x \ V_y \ V_z]^T \in \mathbb{R}^3$ 表示惯性坐标系中直升机的线速度向量; $\boldsymbol{\omega}_b = [p \ q \ r]^T \in \mathbb{R}^3$ 表示机体坐标系下直升机的角速度向量; $\mathbf{f}_b = [f_x \ f_y \ f_z]^T$, $\boldsymbol{\tau}_b = [\tau_x \ \tau_y \ \tau_z]^T \in \mathbb{R}^3$ 分别表示在机体坐标系下作用在直升机上的作用力和力矩; $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 表示机体坐标系到惯性坐标系的转换矩阵, 其表达式如下:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} C_\theta C_\psi & S_\theta C_\psi S_\phi - S_\psi C_\phi & S_\theta C_\psi C_\phi + S_\psi S_\phi \\ C_\theta S_\psi & S_\theta S_\psi S_\phi + C_\psi C_\phi & S_\theta S_\psi C_\phi - C_\psi S_\phi \\ -S_\theta & C_\theta S_\phi & C_\theta C_\phi \end{bmatrix},$$

其中: ϕ 为滚转角, θ 为俯仰角, ψ 为偏航角, $C_\theta, S_\theta, T_\theta$ 则分别为 $\cos \theta, \sin \theta, \tan \theta$ 的缩写, 其他类似. 式(3)中, 姿态向量变换矩阵的表达式为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & S_\phi T_\theta & C_\phi T_\theta \\ 0 & C_\phi & -S_\phi \\ 0 & \frac{S_\phi}{C_\theta} & \frac{C_\phi}{C_\theta} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

式(4)中, $\mathbf{J}$ 为小型无人直升机惯性矩阵, 由于小型无人直升机关于机体坐标系 x - z 平面对称, 所以惯性矩阵 $\mathbf{J}$ 可表示为^[6]

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

其中: I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} 和 I_{xz} 为转动惯量, 一般而言, $I_{xz} \ll I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$, 因此 $\mathbf{J}$ 为正定矩阵. 质量 m 的不确定使得这些转动惯量也存在不确定性.

考虑到小型无人直升机的实际飞行情况与物理约束, 本文作如下合理的假设:

假设 1 在整个飞行过程中, 小型无人直升机的俯仰角 $\theta(t)$ 始终保持在 $\pm\pi/2$ 之间^[9], 即

$$-\frac{\pi}{2} < \theta(t) < \frac{\pi}{2}, \quad \forall t \geq 0. \quad (7)$$

显然, 该假设同时可保证式(5)中矩阵 $\mathbf{H}$ 不会出现奇异性.

2.2 力/力矩计算(Calculation of force/moment)

在小型无人直升机系统中, 力和力矩主要是由主旋翼和尾翼的旋转产生. 此外, 它们还受到主旋翼挥舞的影响. 一般而言, 挥舞角 a 和 b 都比较小, 满足如下近似关系:

$$\sin a \approx a, \sin b \approx b, \cos a \approx 1, \cos b \approx 1. \quad (8)$$

小型无人直升机在进行高度控制时, x 方向和 y 方向上受力与 z 方向上的力相比, 要小很多, 所以此时 $\mathbf{f}_b$ 可以近似为^[14]

$$\mathbf{f}_b = [0 \ 0 \ -T_m]^T. \quad (9)$$

主旋翼和尾翼产生的力矩为

$$\boldsymbol{\tau}_b = \begin{bmatrix} T_m \cdot b \cdot z_m - T_t \cdot z_t + C_{mb} \cdot b \\ T_m \cdot a \cdot z_m + C_{ma} \cdot a \\ T_t \cdot x_t - Q_m \end{bmatrix}, \quad (10)$$

其中: T_m 为主旋翼旋转产生的升力, T_t 为尾翼旋转产生的偏航力, C_{ma} 和 C_{mb} 为主旋翼俯仰与滚转力矩强度系数, $[x_m \ y_m \ z_m]^T$ 和 $[x_t \ y_t \ z_t]^T$ 分别表示主旋翼和尾翼旋转轴到直升机重心的3个轴向距离. Q_m 为主旋翼旋转产生的总转矩, 可近似表示为^[15]

$$Q_m = C_{MQ} \cdot (T_m)^{\frac{3}{2}} + D_{MQ}, \quad (11)$$

其中 C_{MQ} 与 D_{MQ} 为主旋翼扭矩系数.

2.3 挥舞模型(Flapping dynamic model)

小型无人直升机主旋翼挥舞角影响直升机机身受力和力矩, 纵向与横向挥舞角 a 与 b 分别由纵向输入控制信号 δ_{lon} 与横向输入控制信号 δ_{lat} 控制, 其动态挥舞模型为^[8]

$$\tau_f \dot{a} = -a - \tau_f q + A_c c + A_{lon} \delta_{lon}, \quad (12)$$

$$\tau_f \dot{b} = -b - \tau_f p + B_d d + B_{lat} \delta_{lat}, \quad (13)$$

其中: τ_f 为主旋翼挥舞时间常数, 参数 A_c 与 B_d 为主旋翼与副翼耦合系数, A_{lon} 与 B_{lat} 为主旋翼伺服输入比例系数, c 与 d 为副翼挥舞角. 副翼对直升机不产生升力, 它只是通过引入速度反馈抑制外部干扰引起的飞行震荡, 以保证直升机稳定飞行, 其挥舞动态特性表示为

$$\tau_s \dot{c} = -c - \tau_s q + C_{lon} \delta_{lon}, \quad (14)$$

$$\tau_s \dot{d} = -d - \tau_s p + D_{lat} \delta_{lat}, \quad (15)$$

其中: 参数 τ_s 为副翼挥舞时间常数, C_{lon} 与 D_{lat} 为副翼伺服输入比例系数.

2.4 高度与姿态综合模型(Height and attitude combination model)

在研究小型无人直升机的高度控制问题时, 需要考虑其高度模型. 联立式(1)–(2)和(9), 可得小型无人直升机的高度模型为

$$\begin{cases} \dot{z} = V_z, \\ m \dot{V}_z = mg - C_\theta C_\phi \cdot T_m, \end{cases} \quad (16)$$

其中 V_z 为直升机在竖直方向上的速度. 令:

$$\boldsymbol{\Theta} = [\boldsymbol{\eta}^T \ z]^T, \boldsymbol{\Xi} = [\boldsymbol{\omega}_b^T \ V_z]^T, G = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$U_z = -C_\theta C_\phi \cdot T_m, \mathbf{U} = [\boldsymbol{\tau}_b^T \ U_z]^T, \quad (18)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, F(\boldsymbol{\Xi}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_b \times J \boldsymbol{\omega}_b & 0 \\ 0 & -mg \end{bmatrix}. \quad (19)$$

根据式(17)–(18)与式(19)的定义, 综合式(3)–(4)和式(16), 可以得到直升机系统的高度与姿态综合模型为

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}} = G \cdot \boldsymbol{\Xi}, \quad (20)$$

$$\Lambda \dot{\boldsymbol{\Xi}} = -F(\boldsymbol{\Xi}) + \mathbf{U}. \quad (21)$$

由式(6)知, J 为正定矩阵, 又因为 $m > 0$, 所以 Λ 也为正定矩阵.

3 控制器设计(Controller design)

在控制小型无人直升机时, 主要应满足以下两点要求: 1) 小型无人直升机应尽可能快地达到目标状态; 2) 对于不同的负载, 小型无人直升机系统都能正常工作. 为了保证在不同质量负载下, 小型无人直升机的高度与姿态能够快速到达目标状态, 本节为小型无人直升机系统设计了自适应姿态与高度控制器, 该控制器不仅考虑了主旋翼挥舞模型, 而且可对不确定参数质量 m 和惯性矩阵 J 进行在线估计, 在此基础上, 实时调整控制量, 保证了整个直升机控制系统的控制性能.

3.1 模型等效变换(Model transformation)

在小型无人直升机工作过程中, 负载的变化等因素会引起系统质量与惯性矩阵的不确定性, 严重影响依赖于精确模型的常规控制方法的性能. 为此, 本文采用自适应方法对不确定参数进行在线估计. 为方便控制器设计, 将式(4)展开改写如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} & 0 & 0 & -\dot{r} \\ 0 & \dot{q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{r} & -\dot{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} \\ I_{yy} \\ I_{zz} \\ I_{xz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -rq & qr & -pq \\ pr & 0 & -pr & p^2 - r^2 \\ -pq & pq & 0 & qr \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} \\ I_{yy} \\ I_{zz} \\ I_{xz} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\tau}_b. \quad (22)$$

把式(22)代入式(21), 可得

$$\mathbf{U} = Y(\boldsymbol{\Xi}, \dot{\boldsymbol{\Xi}}) \boldsymbol{\Delta} = \Lambda \dot{\boldsymbol{\Xi}} + F(\boldsymbol{\Xi}), \quad (23)$$

$$Y(\boldsymbol{\Xi}, \dot{\boldsymbol{\Xi}}) = \begin{bmatrix} \dot{p} & -rq & qr & -\dot{r} - pq & 0 \\ pr & \dot{q} & -pr & p^2 - r^2 & 0 \\ -pq & pq & \dot{r} & -\dot{p} + qr & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{V}_z - g \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Delta} = (I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, I_{xz}, m)^T, \quad (24)$$

其中 $\boldsymbol{\Delta}$ 为未知参数向量, 显然, 其满足线性参数化条件.

3.2 控制器设计与稳定性分析(Controller design and stability analysis)

本文的控制目标是设计控制输入 T_m, T_t, δ_{lon} 与 δ_{lat} , 使系统在存在参数不确定因素情况下, 其状态 $\Theta = [\phi \ \theta \ \psi \ z]$ 依然能够跟踪目标轨迹 $\Theta_d = [\phi_d \ \theta_d \ \psi_d \ z_d]$. 下面利用反步法^[16]设计小型无人直升机自适应姿态与高度控制器.

Step 1 首先, 定义如下的跟踪误差:

$$\mathbf{e}_1 = \Theta_d - \Theta, \quad (25)$$

$$\mathbf{e}_2 = \dot{\Xi}_d - \dot{\Xi}, \quad (26)$$

其中: 误差向量 $\mathbf{e}_1 = (e_\phi, e_\theta, e_\psi, e_z)^T$, $\mathbf{e}_2 = (e_p, e_q, e_r, e_{vz})^T$, $\dot{\Xi}_d$ 为期望速度向量. 对式(25)关于时间求导, 并将式(20)和(26)代入, 可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_1 &= \dot{\Theta}_d - \dot{\Theta} = \dot{\Theta}_d - G\dot{\Xi} = \\ &\dot{\Theta}_d - G(\dot{\Xi}_d - \mathbf{e}_2). \end{aligned} \quad (27)$$

在此, 选择虚拟控制输入 $\dot{\Xi}_d$ 如下:

$$\dot{\Xi}_d = G^{-1}(\dot{\Theta}_d + K_1 \mathbf{e}_1), \quad (28)$$

其中 K_1 为正定对称矩阵. 那么, 式(27)可改写为

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = -K_1 \mathbf{e}_1 + G\mathbf{e}_2. \quad (29)$$

选择第1个Lyapunov候选函数为

$$V_1 = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1^T \cdot \mathbf{e}_1 \geq 0. \quad (30)$$

对式(30)进行求导, 并将式(29)代入, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \mathbf{e}_1^T \cdot \dot{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1^T \cdot (G\mathbf{e}_2 - K_1 \mathbf{e}_1) = \\ &-\mathbf{e}_1^T K_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1^T G\mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (31)$$

Step 2 定义纵向挥舞角误差 e_a 与横向挥舞角误差 e_b 分别为:

$$e_a = a_d - a, \quad (32)$$

$$e_b = b_d - b, \quad (33)$$

a_d 与 b_d 分别为期望的纵向与横向挥舞角. 根据式(10)与式(18)可得与 a_d 与 b_d 对应的控制力与力矩 $\mathbf{U}_d$ 为

$$\mathbf{U}_d = \begin{bmatrix} T_m b_d z_m - T_t z_t + C_{mb} b_d \\ T_m a_d z_m + C_{ma} a_d \\ T_t x_t - Q_m \\ -C_\theta C_\phi T_m \end{bmatrix}, \quad (34)$$

而与挥舞角误差 e_a 与 e_b 对应的控制力与力矩 $\tilde{\mathbf{U}}$ 为

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} -T_m e_b Z_m - C_{mb} e_b \\ -T_m e_a z_m - C_{ma} e_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

对式(26)两边同时乘以 Λ , 得

$$\Lambda \mathbf{e}_2 = \Lambda \dot{\Xi}_d - \Lambda \dot{\Xi}, \quad (36)$$

对式(36)进行求导, 并将式(21)代入得

$$\Lambda \dot{\mathbf{e}}_2 = \Lambda \dot{\Xi}_d + F(\dot{\Xi}) - \mathbf{U}, \quad (37)$$

根据式(23)可得

$$\Lambda \dot{\Xi}_d + F(\dot{\Xi}) = Y(\dot{\Xi}, \dot{\Xi}_d) \Delta. \quad (38)$$

在此, 设计控制力与力矩为

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_d + \tilde{\mathbf{U}}, \quad (39)$$

$$\mathbf{U}_d = Y(\dot{\Xi}, \dot{\Xi}_d) \hat{\Delta} + K_2 \mathbf{e}_2 + G^T \mathbf{e}_1, \quad (40)$$

式中: K_2 为正定对称矩阵, $\hat{\Delta}$ 为未知参数向量 Δ 的在线估计, 其自适应更新律为

$$\dot{\hat{\Delta}} = \Gamma Y^T(\dot{\Xi}, \dot{\Xi}_d) \mathbf{e}_2, \quad (41)$$

其中: Γ 为一正定对称矩阵. 将式(38)和式(39)代入式(37), 可得

$$\Lambda \dot{\mathbf{e}}_2 = Y(\dot{\Xi}, \dot{\Xi}_d) \tilde{\Delta} - K_2 \mathbf{e}_2 - G^T \mathbf{e}_1 - \tilde{\mathbf{U}}, \quad (42)$$

其中 $\tilde{\Delta} = \Delta - \hat{\Delta}$ 为未知参数的估计误差. 在此, 考虑到矩阵 Λ 为正定矩阵, 选择第2个Lyapunov候选函数如下:

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_2^T \cdot \Lambda \cdot \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} \tilde{\Delta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\Delta} \geq 0. \quad (43)$$

对式(43)两边关于时间求导, 并将式(31)(41)及式(42)代入, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + \mathbf{e}_2^T \cdot \Lambda \cdot \dot{\mathbf{e}}_2 - \tilde{\Delta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\Delta}} = \\ &-\mathbf{e}_1^T \cdot K_1 \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2^T \cdot K_2 \cdot \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2^T \cdot \tilde{\mathbf{U}}. \end{aligned} \quad (44)$$

Step 3 联立式(34)与式(40), 可以得到直升机主旋翼升力 T_m , 尾翼偏航力 T_t 和挥舞角期望值 a_d 与 b_d . 对式(32)两边求导并将式(12)代入可得

$$\begin{aligned} \tau_f \dot{e}_a &= \tau_f \dot{a}_d - \tau_f \dot{a} = \\ &\tau_f \dot{a}_d - [-a - \tau_f q + A_c c + A_{lon} \delta_{lon}]. \end{aligned} \quad (45)$$

在此, 选择横向控制输入信号 δ_{lon} 为

$$\delta_{lon} = \frac{\tau_f \dot{a}_d + a_d + \tau_f q - A_c c + e_q (T_m z_m + C_{ma})}{A_{lon}}. \quad (46)$$

将式(46)代入式(45)可得

$$\tau_f \dot{e}_a = -e_a - e_q (T_m z_m + C_{ma}). \quad (47)$$

将式(46)代入副翼的挥舞方程式(14)可得

$$\begin{aligned} \dot{c} &= -\left(\frac{1}{\tau_s} + \frac{C_{lon} A_c}{\tau_s A_{lon}}\right) c - \left(1 - \frac{C_{lon} \tau_f}{\tau_s A_{lon}}\right) q + \\ &\frac{C_{lon}}{\tau_s A_{lon}} (a_d + e_q (T_m z_m + C_{ma})) + \frac{C_{lon} \tau_f}{\tau_s A_{lon}} \dot{a}_d. \end{aligned} \quad (48)$$

为了简化随后描述, 令:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{\tau_s} + \frac{C_{lon} A_c}{\tau_s A_{lon}}, \quad c_2 = 1 - \frac{C_{lon} \tau_f}{\tau_s A_{lon}}, \quad c_3 = \frac{C_{lon}}{\tau_s A_{lon}}, \\ c_4 &= \frac{C_{lon} \tau_f}{\tau_s A_{lon}}, \quad h(t) = a_d + e_q (T_m z_m + C_{ma}), \end{aligned}$$

则式(48)可改写为

$$\dot{c} = -c_1 \cdot c - c_2 \cdot q + c_3 \cdot h(t) + c_4 \cdot \dot{a}_d. \quad (49)$$

对式(49)求解可得

$$\begin{aligned} c(t) = & e^{-c_1(t-t_0)} \cdot c(t_0) - c_2 \int_{t_0}^t e^{-c_1(t-\tau)} \cdot q(\tau) \cdot d\tau + \\ & c_3 \int_{t_0}^t e^{-c_1(t-\tau)} \cdot h(\tau) \cdot d\tau + \\ & c_4 \int_{t_0}^t e^{-c_1(t-\tau)} \cdot \dot{a}_d(\tau) \cdot d\tau. \end{aligned} \quad (50)$$

取 $w = \sup\{|q(t)|, |h(t)|, |\dot{a}_d(t)|\}$, 由 $q(t)$, $a(t)$, $\dot{a}_d(t)$, $T_m(t) \in L_\infty$, 可知 $w < \infty$. 进一步由式(50)可得

$$\begin{aligned} |c(t)| \leq & |e^{-c_1(t-t_0)} \cdot c(t_0)| + \\ & (c_2 + c_3 + c_4) \left| \int_{t_0}^t e^{-c_1(t-\tau)} \cdot w(\tau) \cdot d\tau \right| \leq \\ & |c(t_0)| + w(c_2 + c_3 + c_4) \cdot \left| \left[-\frac{1}{c_1} e^{-c_1(t-t_0)} \right]_{t_0}^t \right| \leq \\ & |c(t_0)| + \frac{(c_2 + c_3 + c_4)}{c_1} \cdot w < \infty. \end{aligned} \quad (51)$$

所以式(46)的控制输入不仅可使 c , $\delta_{lon} \in L_\infty$, 而且保证了副翼的稳定作用. 对式(33)两边求导并将式(13)代入可得

$$\begin{aligned} \tau_f \dot{e}_b = & \tau_f \dot{b}_d - \tau_f \dot{b} = \\ & \tau_f \dot{b}_d - [-b - \tau_f p + B_d d + B_{lat} \delta_{lat}]. \end{aligned} \quad (52)$$

在此, 选择纵向控制输入信号 δ_{lat} 为

$$\delta_{lat} = \frac{\tau_f \dot{b}_d + b_d + \tau_f p - B_d d + e_p(T_m z_m + C_{mb})}{B_{lat}}. \quad (53)$$

将式(53)代入式(52)可得

$$\tau_f \dot{e}_b = -e_b - e_p(T_m z_m + C_{mb}). \quad (54)$$

表1 小型无人直升机参数^[8]

Table 1 Helicopter parameters

参数(单位)	参数描述
$C_{ma} = 107 \text{ (N} \cdot \text{m/rad)}$, $C_{mb} = 199 \text{ (N} \cdot \text{m/rad)}$	俯仰与滚转力矩强度系数
$C_{MQ} = 0.0044 \text{ (m} \cdot \text{N}^{-\frac{1}{2}})$, $D_{MQ} = 0.6304 \text{ (m} \cdot \text{N)}$	主旋翼扭矩系数
$x_m = 0 \text{ m}$, $z_m = 0.284 \text{ m}$	主旋翼中心与直升机重心 x 轴和 z 轴距离
$x_t = 0.915 \text{ m}$, $z_t = 0.104 \text{ m}$	尾翼中心与直升机重心 x 轴和 z 轴距离
$\tau_f = 0.01 \text{ s}$, $\tau_s = 0.2 \text{ s}$	主旋翼与副翼挥舞时间常数
$A_c = 0.152$, $B_d = 0.136$	主旋翼与副翼耦合系数
$A_{lon} = 0.19 \text{ (rad/ms)}$, $B_{lat} = 0.17 \text{ (rad/ms)}$	主旋翼伺服输入比例系数
$C_{lon} = 1.58 \text{ (rad/ms)}$, $D_{lat} = 1.02 \text{ (rad/ms)}$	副翼伺服输入比例系数

直升机的初始状态为

$$\eta_0 = [0 \ 0 \ 0]^T \text{ rad}, z_0 = -4 \text{ m},$$

期望状态为

$$\eta_d = 0.5 \sin t \cdot [1 \ 1 \ 1]^T \text{ rad}, z_d = -5 \text{ m},$$

未知系统参数向量的初始值为

$$I_{xx} = 0.3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, I_{yy} = 0.32 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

与对式(48)的分析相类似, 可以证明式(53)可以保证 d , $\delta_{lat} \in L_\infty$. 定义Lyapunov候选函数

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2} \tau_f e_a^2 + \frac{1}{2} \tau_f e_b^2. \quad (55)$$

对式(55)求导, 将式(47)和式(54)代入可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = & \dot{V}_2 + \tau_f \dot{e}_a e_a + \tau_f \dot{e}_b e_b = \\ & -e_1^T \cdot K_1 \cdot e_1 - e_2^T \cdot K_2 \cdot e_2 - \\ & e_a^2 - e_b^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (56)$$

因此系统稳定, 进一步定义如下的辅助函数:

$$\begin{aligned} f(t) = & e_1^T \cdot K_1 \cdot e_1 + e_2^T \cdot K_2 \cdot e_2 + \\ & e_a^2 + e_b^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (57)$$

对式(57)两边关于时间求导, 有

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) = & e_1^T \cdot K_1 \cdot \dot{e}_1 + e_2^T \cdot K_2 \cdot \dot{e}_2 + \\ & 2e_a \dot{e}_a + 2e_b \dot{e}_b. \end{aligned} \quad (58)$$

由式(56)可知

$$e_1, e_2, e_a, e_b, \tilde{\Delta} \in L_\infty. \quad (59)$$

由式(29)(42)(47)(54)与式(59)可知

$$\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_a, \dot{e}_b, \dot{\tilde{\Delta}} \in L_\infty, \quad (60)$$

因此, $\dot{f}(t) \in L_\infty$, 根据芭芭拉定理的推论^[17]可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} e_1, e_2, e_a, e_b = 0$. 所以此控制器不仅可以保证控制量 T_m, T_t, δ_{lon} 与 δ_{lat} 都有界, 且能够使姿态和高度渐近跟踪目标轨迹.

4 仿真与分析(Simulation and analysis)

为了验证本文所设计的小型无人直升机控制系统的实际效果, 对其进行了数值仿真. 在仿真中, 小型无人直升机的参数值如表1所示.

$$I_{zz} = 0.3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, I_{xz} = 0.03 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, m = 7 \text{ kg},$$

控制器各参数设置如下:

$$K_1 = \text{diag}\{5, 5, 5, 0.8\},$$

$$K_2 = \text{diag}\{10, 10, 10, 20\},$$

$$\Gamma = \text{diag}\{2, 2, 2, 0.0001, 0.8\}].$$

为了验证控制器对未知参数的自适应性, 对如下

几种情况进行了仿真验证. 第1种情况下系统参数选择为

$$m_1 = 7 \text{ kg}, J_1 = \begin{bmatrix} 0.15 & 0 & -0.02 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ -0.02 & 0 & 0.15 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

第2种情况下系统参数为

$$m_2 = 8 \text{ kg}, J_2 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & -0.03 \\ 0 & 0.3 & 0 \\ -0.03 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

第3种情况是模拟直升机飞行中增加负载的过程, 假设直升机仿真模型中初始参数为

$$\begin{aligned} m_0 &= 8 \text{ kg}, I_{xx0} = 0.25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ I_{yy0} &= 0.3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, I_{zz0} = 0.25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ I_{xz0} &= -0.03 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \end{aligned}$$

$t = 5 \text{ s}$ 时, 在机体坐标系的 $\delta x = 0.2 \text{ m}$, $\delta y = 0 \text{ m}$, $\delta z = 0.1 \text{ m}$, 位置处增加负载 $\delta m = 1 \text{ kg}$, 则直升机系统的相应参数变为

$$\begin{aligned} m_3 &= m_0 + \delta m = 8 + 1 = 9 \text{ kg}, \\ I_{xx} &= I_{xx0} + \delta m \cdot ((\delta y)^2 + (\delta z)^2) = \\ &0.25 + 1 \cdot (-0.1)^2 = 0.26 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ I_{yy} &= I_{yy0} + \delta m \cdot ((\delta x)^2 + (\delta z)^2) = \\ &0.3 + 1 \cdot [(0.2)^2 + (0.1)^2] = 0.35 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{zz} &= I_{zz0} + \delta m \cdot ((\delta x)^2 + (\delta y)^2) = \\ &0.25 + 1 \cdot (0.2)^2 = 0.29 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ I_{xz} &= I_{xz0} + \delta m \cdot (\delta x \cdot \delta y) = \\ &-0.03 + 1 \cdot (0.2) \cdot 0.1 = -0.01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \end{aligned}$$

而惯性矩阵变为

$$J_3 = \begin{bmatrix} 0.26 & 0 & -0.01 \\ 0 & 0.35 & 0 \\ -0.01 & 0 & 0.29 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

仿真结果如图2–5所示. 其中: 图中实线为第1种情况的仿真结果, 虚线为第2种情况的仿真结果, 点划线为第3种情况的仿真结果. 图2为姿态与高度跟踪误差, 可以看出姿态比高度收敛速度要快很多, 因此在姿态控制时有必要考虑主旋翼的挥舞运动. 图3为3种情况下的控制输入信号, 包括主旋翼与尾翼产生的控制力输入以及纵向与横向输入控制信号; 图4为惯性矩阵参数的估计, 图5为直升机系统质量参数的估计, 由图中可以看出每种情况下参数估计值在一段时间后均收敛到某一恒定值. 通过仿真结果可以看出: 当系统质量和惯性矩阵等参数未知或发生阶跃变化时, 本文设计的自适应控制器可以根据系统状态响应对这些不确定参数进行在线估计, 并实时调节控制量, 提高了系统对不确定参数的适应能力, 保证了系统在不同参数情况下均能取得良好的控制性能.

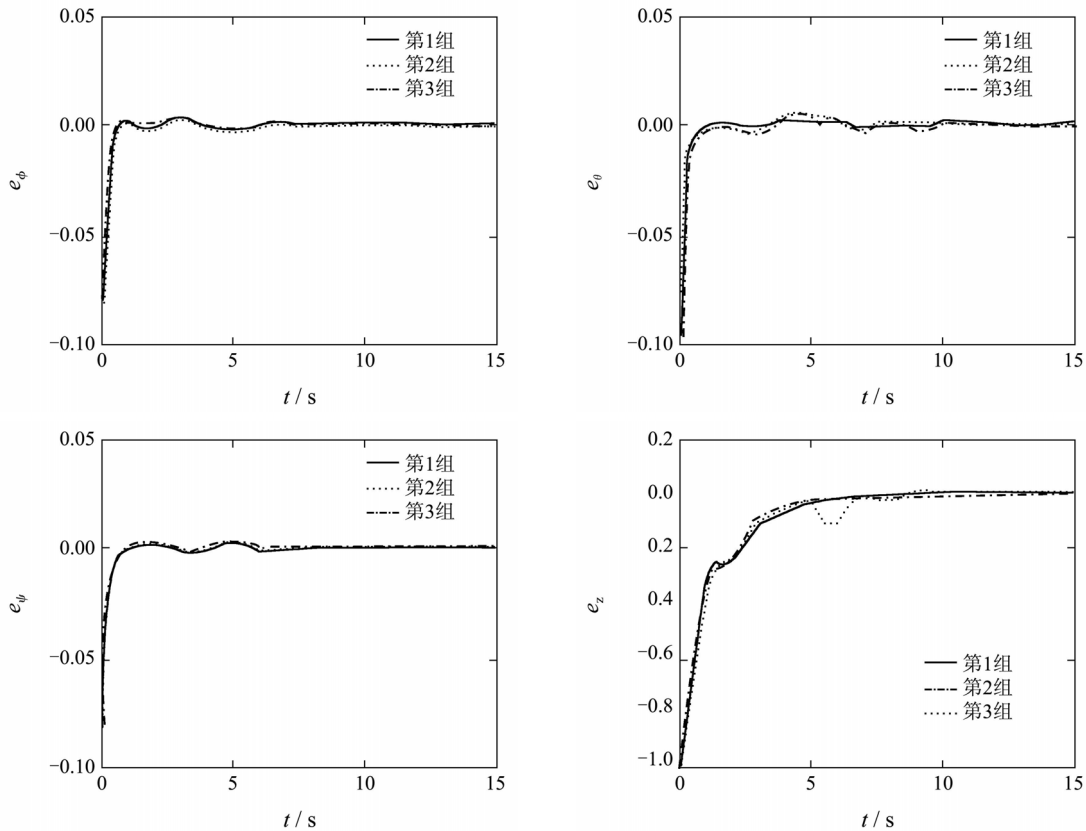


图2 姿态与高度跟踪误差

Fig. 2 Attitude and height tracking error

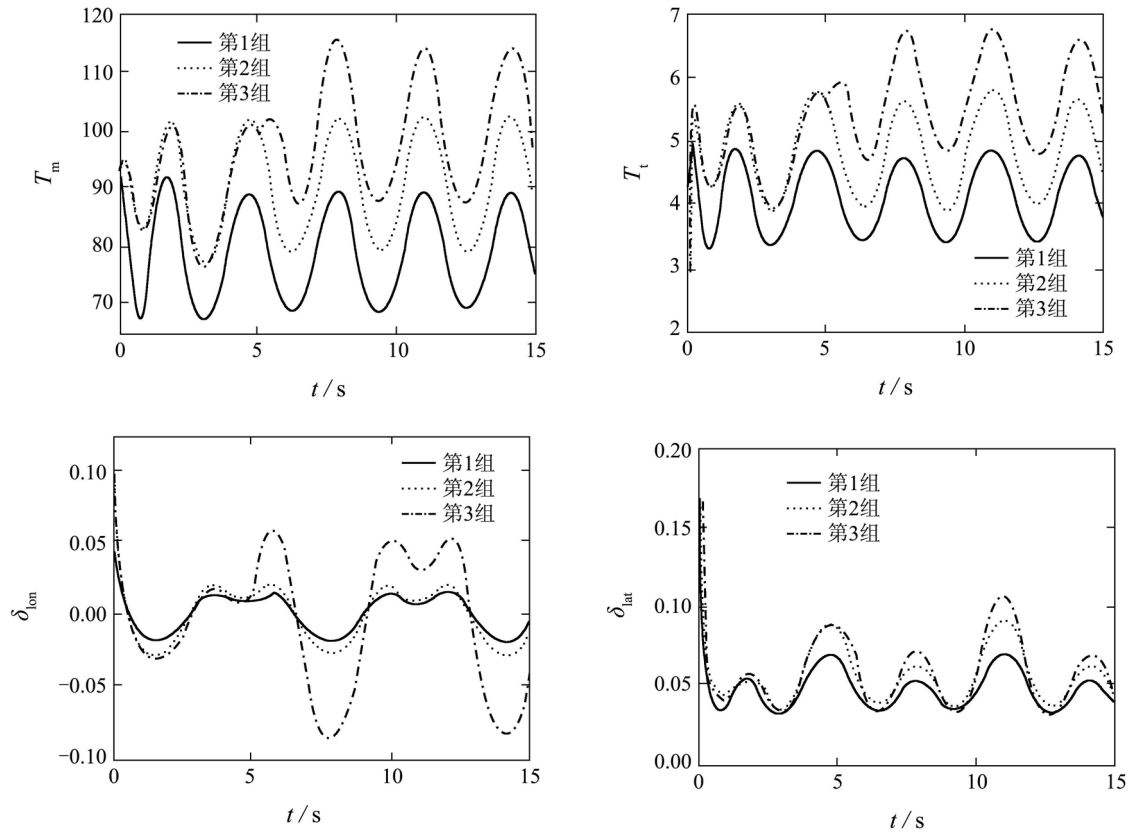


图3 直升机控制输入量

Fig. 3 Control inputs

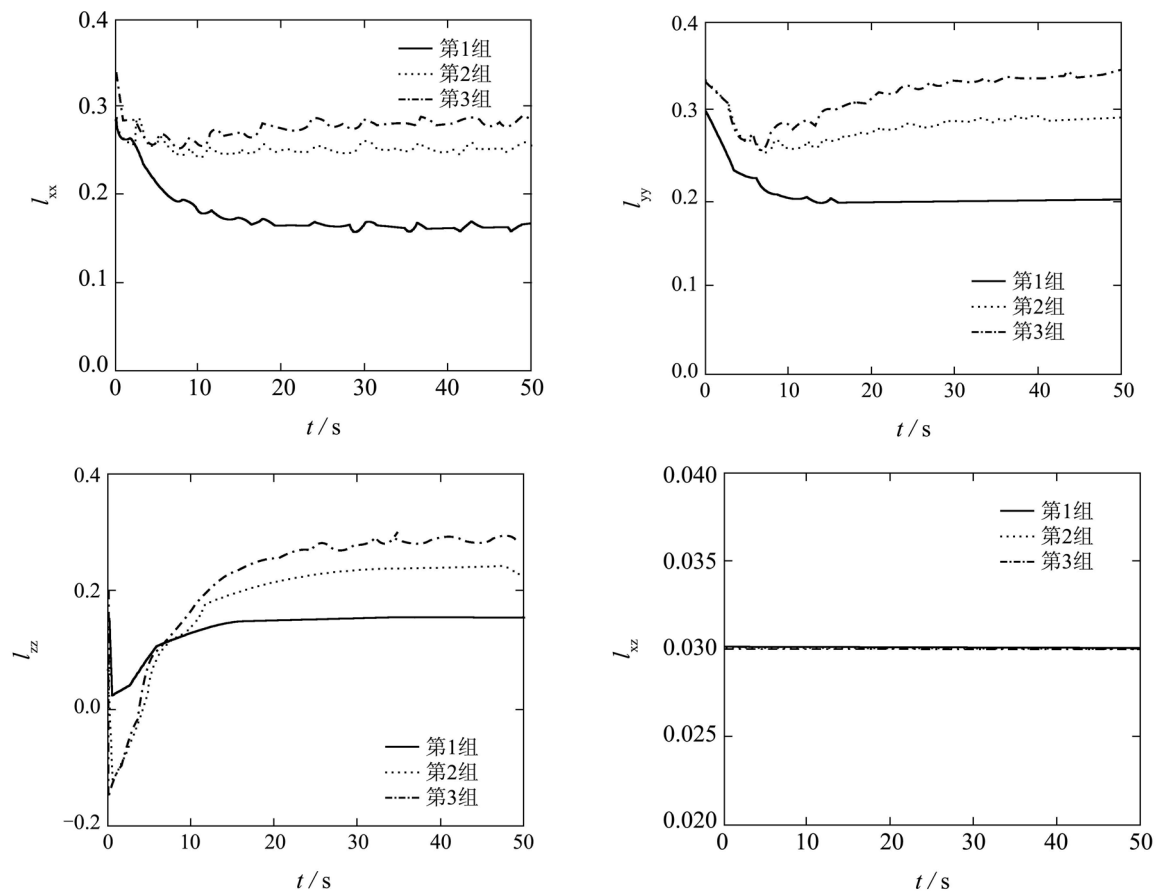
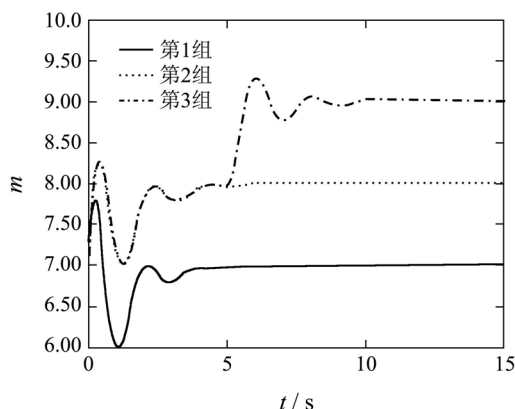


图4 惯性矩阵参数估计

Fig. 4 Online estimation of the inertial matrix

图5 直升机系统质量 m 估计Fig. 5 Online estimation of m

5 结论(Conclusion)

本文提出了一种基于反步法的自适应姿态与高度控制器,它可使直升机的姿态与高度准确跟踪给定轨迹。本文首先对直升机运动学模型进行了等效变换,然后在分析主旋翼挥舞模型的基础上,应用反步法设计了高度与姿态控制器,它利用一种自适应机制对系统的未知参数进行实时估计,文中还应用Lyapunov方法和芭芭拉定理对闭环系统进行了稳定性分析,并且通过仿真结果进一步证实了控制器的有效性。结果表明本控制算法能有效地处理系统未知参数带来的影响,具有良好的控制性能。

参考文献(References):

- [1] ISIDORI A, MARCONI L, SERRANI A. Robust nonlinear motion control of a helicopter[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(3): 413 – 426.
- [2] MAHONY R, HAMEL T. Robust trajectory tracking for a scale model autonomous helicopter[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2004, 14(12): 1035 – 1059.
- [3] SHIN J, NONAMI K, FUJIWARA D, et al. Model-based optimal attitude and position control of a small-scale unmanned helicopter[J]. *Robotica*, 2005, 23(1): 51 – 63.
- [4] 辛哲奎, 方勇纯. 无人机地面目标跟踪系统的建模与控制[J]. 高技术通讯, 2009, 19(4): 398 – 403.
(XIN Zhekui, FANG Yongchun. Modeling and control for tracking ground target using an unmanned air vehicle[J]. *Chinese High Technology Letters*, 2009, 19(4): 398 – 403.)
- [5] 辛哲奎, 方勇纯, 张雪波. 小型无人机地面目标跟踪系统机载云台自适应跟踪控制[J]. 控制理论与应用, 2010, 27(8): 1001 – 1006.
(XIN Zhekui, FANG Yongchun, ZHANG Xuebo. Adaptive control for the on-board pan-tilt camera in an UAV ground-target-tracking system[J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(8): 1001 – 1006.)
- [6] CAI G W, CHEN B M, PENG K M, et al. Modeling and control system design for a UAV helicopter[C] // *Proceedings of the*

14th Mediterranean Conference on Control and Automation. Ancona, Italy: IEEE, 2006, 6: 600 – 606.

- [7] JIAO Y S, DU J, WANG X M, et al. H_∞ state feedback control for UAV Maneuver trajectory tracking[C] // *Proceedings of 2010 International Conference on Intelligent Control and Information Processing*. Dalian, China: IEEE, 2010, 8: 253 – 257.
- [8] AHMED B, POTA H R, MATT G. Flight control of a rotary wing UAV using backstepping[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2010, 20(6): 639 – 658.
- [9] LEE C T, TSAI C C. Adaptive backstepping integral control of a small-scale helicopter for airdrop missions[J]. *Asian Journal of Control*, 2010, 12(4): 531 – 541.
- [10] SANCHEZ E N, BECERRA H M, VELEZ C M. Combining fuzzy and PID control for an unmanned helicopter[C] // *2005 Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society*. Detroit, USA: IEEE, 2005, 6: 235 – 240.
- [11] 宋彦国, 张呈林. 小型无人直升机模糊飞行控制系统设计[J]. 南京航空航天大学学报, 2007, 39(1): 103 – 106.
(SONG Yanguo, ZHANG Chenglin. Flight control system of small unmanned helicopter based on fuzzy logic[J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics*, 2007, 39(1): 103 – 106.)
- [12] SHIM H, KOO T J, HOFFMANN F, et al. A comprehensive study of control design for an autonomous helicopter[C] // *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*. Tampa, USA: IEEE, 1998, 12: 3653 – 3658.
- [13] 陈欣, 杨一栋, 张民. 一种无人机姿态智能PID控制研究[J]. 南京航空航天大学学报, 2003, 35(6): 611 – 615.
(CHEN Xin, YANG Yidong, ZHANG Min. Study of an intelligent PID attitude controller for UAV[J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics*, 2003, 35(6): 611 – 615.)
- [14] MARCONI L, NALDI R. Robust full degree-of-freedom tracking control of a helicopter[J]. *Automatica*, 2007, 43(11): 1909 – 1920.
- [15] KOO T J, SASTRY S. Differential flatness based full authority helicopter control design[C] // *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*. Phoenix, USA: IEEE, 1999, 12: 1982 – 1987.
- [16] KANELAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P V, MORSE A S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, 36(11): 1241 – 1253.
- [17] 方勇纯, 卢桂章. 非线性系统理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009, 21.
(FANG Yongchun, LU Guizhang. *Nonlinear System Theory*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2009: 21.)

作者简介:

孙秀云 (1978—), 女, 博士研究生, 主要研究方向为小型无人直升机系统控制、自适应控制等非线性控制, E-mail: sunxy@robot.nankai.edu.cn;

方勇纯 (1973—), 男, 教授, 博士生导师, IEEE高级会员, 主要研究方向为非线性控制、机器人视觉伺服、无人机和桥式吊车等欠驱动系统控制, E-mail: yfang@robot.nankai.edu.cn;

孙宁 (1988—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为欠驱动桥式吊车系统控制、自适应控制、学习控制和模糊控制等, E-mail: sunn@robot.nankai.edu.cn.