空间分形Julia集的辨识控制

孙　洁[1,2†], 乔　威[2], 孙伟华[3]

(1. 山东大学 计算机科学与技术学院, 山东 青岛 266237;

2. 山东大学(威海) 机电与信息工程学院, 山东 威海 264209; 3. 山东大学(威海) 数学与统计学院, 山东 威海 264209)

摘要: 由于空间分形Julia集合的参数辨识问题在典型的Langevin问题中尚未解决, 本文提出一种新的方法设计了普遍适用的自适应同步控制器和参数自适应律的解析表达式, 解决了在驱动系统参数未知的情况下无法实现同步控制的问题, 并且在实现渐近同步的过程中能够辨识出驱动系统的未知参数, 通过仿真示例验证了该方法有效. 另外, 该方法也适用于最基本的Julia集.

关键词: 空间Julia集; 同步控制; 参数辨识

引用格式: 孙洁, 乔威, 孙伟华. 空间分形Julia集的辨识控制. 控制理论与应用, 2019, 36(5): 680 – 686

DOI: 10.7641/CTA.2018.18062

A new identification control of spatial Julia sets

SUN Jie[1,2†], QIAO Wei[2], SUN Wei-hua[3]

(1. School of Computer Science and Technology, Shandong University, Qingdao Shandong 266237, China;

2. School of Mechanical, Electrical and Information Engineering, Shandong University at Weihai, Weihai Shandong 264209, China;

3. School of Mathematics and Statistics, Shandong University at Weihai, Weihai Shandong 264209, China)

Abstract: Since the parameter identification problem of spatial Julia sets in typical Langevin questions is still unclear, in this work, the analytical expression of the parameter adaptive law is proposed in order to design the widely used adaptive synchronous controller. Then the synchronous control can be achieved in spite of unknown target parameters that can be identified in the asymptotic synchronization process. Based on the application of this method on a few examples, this strategy has proven to be effective when it is applied to the most basic Julia sets.

Key words: spatial Julia sets; synchronization; parameter identification

Citation: SUN Jie, QIAO Wei, SUN Weihua. A new identification control of spatial Julia sets. *Control Theory & Applications*, 2019, 36(5): 680 – 686

1　引言

分形理论是数学家曼德布罗特(B. B. Mandelbort)提出研究分形性质及其应用的科学[1]. 分形理论是一门新兴的横断学科, 成功解释了很多非线性现象, 它在计算机科学、化学、生物学、地理学和社会科学等众多自然科学中都有着广泛的应用[2–6]. 其中, 典型Langevin问题是指在双势阱和变化的磁场中并受一恒冲量不断作用的运动带电粒子的动力学, 分析其物理意义发现广义曼德布罗特–茱莉亚(Mandelbort-Julia, M–J)集的分形结构可形象地反映出带电粒子速度的变化规律, 粒子受到冲量的作用, 速度将发生变化[7–8]. 因此对分形集的同步控制和参数辨识问题的研究是十分迫切而且有意义的工作.

目前, 大部分研究者关注的更多是同步控制问题而很少考虑参数辨识问题. 张永平等人实现了第二Julia集的同步控制, 刘平等人利用线性耦合的方法实现了耦合映射格中两种不同Julia集的耦合同步[9–10]. 除此之外, 空间Julia集的线性广义同步以及交替Julia集的最优控制与同步都得到了充分的关注与研究, 王培等人研究了Julia集不同结构分形集之间的同步, 实现了复Lorenz系统的Julia集与henon映射之间的同步[11–12]. 王当等人实现了在复杂Lorenz系统中不同结构的Julia集合Henon映射之间的同步[13–14]. 然而, 在驱动系统参数未知的情况下上述方法效果并不明显.

收稿日期: 2017−05−02; 录用日期: 2018−06−29.

†通信作者. E-mail: sunj@sdu.edu.cn; Tel.: +86 631-5688373.

本文责任编委: 谭永红.

国家自然科学基金项目(61503215, 61473174, 11501328), 山东省自然科学基金项目(ZR2016FM46), 威海市科技局项目(2016DXGJ11), 中央高校基本科研业务费专项资金(2019ZRJC005)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61503215, 61473174, 11501328), the Shandong Provincial Natural Science Foundation of China (ZR2016FM46), the Weihai Science and Technology Bureau (2016DXGJ11) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities(2019ZRJC005).

本文系统地研究空间Julia集的参数辨识问题, 实现了在驱动系统参数未知的情况下达到空间Julia集的同步控制.

2 空间分形Julia集的同步控制器及参数辨识器的设计

2.1 预备知识

考虑含有两个独立变量的分布参数复动力系统

$$z_{m+1,n}+\omega z_{m,n+1}=f(c,z_{m,n}), \tag{1}$$

其中: $f(\cdot)$是一个非线性函数, c是复数, ω是一个实参数且$\omega\neq 0$. 如果令

$$f(c,z_{m,n})=z_{m,n}^2+c, \tag{2}$$

则复动力系统(1)为

$$z_{m+1,n}+\omega z_{m,n+1}=z_{m,n}^2+c. \tag{3}$$

当$\omega=0, n=n_0$时, 则

$$z_{m+1,n_0}=z_{m,n_0}^2+c. \tag{4}$$

复动力系统(4)就是最基本的Julia集.

注意到, 复动力系统(1)的连续形式是

$$\frac{\partial\phi(z,v)}{\partial z}+\omega\frac{\partial\phi(z,v)}{v}=f(\phi(z,v)), \tag{5}$$

而方程(5)是物理上的一维对流方程, 因此研究复动力系统(1)可以为研究一维复对流系统提供有用的信息. 系统(1)含有两个独立的变量, 因而其运动状态是空间运动行为, 所以系统(1)称为多变量复动力系统. 引入如下的定义:

定义 1[15]　对于系统(1), 如果一个状态$z_{m,n}$在迭代过程中呈现出周期性特征, 并且与它差别微小的点经过迭代之后均离它远去, 即表现出斥性特征, 则状态$z_{m,n}$称为系统(1)的空间斥性周期点.

定义 2[16]　空间斥性周期点的闭包称为空间Julia集. 令

$$N_r=\{r,r+1,r+2,\cdots|r\text{是非负整数}\}.$$

考虑复数域上两个相同结构的空间Julia集

$$x_{m+1,n}+\omega x_{m,n+1}=f(x_{m,n},c), \tag{6}$$

$$y_{m+1,n}+\omega y_{m,n+1}=g(y_{m,n},c_{m,n}), \tag{7}$$

其中: $x_{m,n}$是驱动系统状态, $y_{m,n}$是响应系统状态, $f(\cdot), g(\cdot)$都是非线性函数, c, $c_{m,n}$都是复数, ω是实参数且$\omega\neq 0$.

为了使系统(6)和系统(7)的空间Julia集关联起来, 对系统(6)和(7)进行耦合, 在系统(7)中引入控制器

$$y_{m+1,n}+\omega y_{m,n+1}= \\ g(y_{m,n},c_{m,n})+u_{m,n}(x_{m,n},y_{m,n},\omega), \tag{8}$$

其中系统(6)作为驱动系统, 系统(8)作为响应系统, 控制器$u_{m,n}$使得驱动系统和响应系统渐近达到同步. ω是给定的实数, c是驱动系统需要辨识的复数.

当系统参数ω, c, $c_{m,n}$给定后, 其对应的空间Julia集也确定,不妨分别设为J^*, J_n, 如果

$$\lim_{n\to\infty}(J_n\cup J^*-J_n\cap J^*)=\varnothing, \tag{9}$$

则称系统(6)和系统(8)的空间Julia集实现同步.

事实上, 由空间Julia集的定义知道Julia集$J(f)$与f的轨道是紧密相关的, 因此本文利用轨道同步实现空间Julia集同步, 并设计了控制器. 系统(6)和(8)迭代初始值相同, 当$m\to\infty$, $n\to\infty$时, 系统(6)和(8)实现渐进同步, $c_{m,n}\to c$, 辨识出驱动系统的未知参数c.

2.2 空间Julia集的同步控制器及参数辨识器的设计

考虑一类相当广泛的复系统空间Julia集$z_{m+1,n}+\omega z_{m,n+1}=z_{m,n}^2+c$, 其中: c是复数, ω是实参数且$\omega\neq 0$, 讨论该系统的同步控制及参数c的辨识问题. 此时, 驱动系统(6)和响应系统(8)分别如下:

$$x_{m+1,n}+\omega x_{m,n+1}=x_{m,n}^2+c, \tag{10}$$

$$y_{m+1,n}+\omega y_{m,n+1}=y_{m,n}^2+c_{m,n}+u_{m,n}. \tag{11}$$

令驱动系统(10)与响应系统(11)之间的误差为

$$e_{m,n}=x_{m,n}-y_{m,n}. \tag{12}$$

假设驱动系统是参数c未知的分形集. 本文的目的是通过设计适当的同步控制器, 在驱动系统参数未知的情况下, 使得驱动系统(10)和响应系统(11)达到渐近同步, 同时辨识出未知参数c.

为此, 设计响应系统(11)同步控制器为

$$u_{m,n}=x_{m,n}^2-y_{m,n}^2, \tag{13}$$

参数辨识器为

$$c_{m+1,n}-\omega c_{m,n+1}-(1-\omega)c_{m,n}=ke_{m,n}, \tag{14}$$

其中

$$\begin{cases}2\omega^2-2<k<0, & 0<\omega<1,\\ \dfrac{1-2\omega}{4}<k<\dfrac{3+2\omega-\omega^2}{4}, & 1\leqslant\omega<3,\end{cases}$$

且ω, k为实数.

定理 1　对于系统(10)和(11), 当采用同步控制器式(13)和参数辨识器式(14) 时, 则驱动系统(10)和响应系统(11)从任意初值出发的轨迹均可以达到全局渐近同步, 并且辨识出驱动系统空间Julia集的参数c.

证　由前面分析知, 若驱动系统(10)和响应系统(11)实现轨道同步,则系统(10)和(11)的空间Julia集从任意初始值出发均可达到全局渐近同步. 若证系统(10) 和 (11) 实现轨道同步, 即证$|x_{m,n}-y_{m,n}|\to 0$ $(m\to\infty, n\to\infty)$, 即证$|e_{m,n}|\to 0(m\to\infty, n\to\infty)$.

由式(10)–(11)(13)知

$$x_{m+1,n}-y_{m+1,n}+\omega(x_{m,n+1}-y_{m,n+1})=c-c_{m,n}. \tag{15}$$

又由式(12)知

$$x_{m+1,n}-y_{m+1,n}=e_{m+1,n} \tag{16}$$

和

$$x_{m,n+1}-y_{m,n+1}=e_{m,n+1}. \tag{17}$$

将式(16)–(17)代入式(15)得

$$e_{m+1,n}+\omega e_{m,n+1}=c-c_{m,n}, \tag{18}$$

因此, 有

$$e_{m+2,n}+\omega e_{m+1,n+1}=c-c_{m+1,n}, \tag{19}$$

$$\omega e_{m+1,n+1}+\omega^2 e_{m,n+2}=\omega c-\omega c_{m,n+1}. \tag{20}$$

将式(14)代入式(18)–(20)得

$$\omega^2 e_{m,n+2}-e_{m+2,n}+(1-\omega)e_{m+1,n}+(1-\omega)\omega e_{m,n+1}-ke_{m,n}=0. \tag{21}$$

为简化证明过程, 只考虑一特殊条件, 令$k=k_1+k_2$, 则

$$\begin{cases}\omega^2 e_{m,n+2}+(1-\omega)\omega e_{m,n+1}-k_1 e_{m,n}=0,\\ -e_{m+2,n}+(1-\omega)e_{m+1,n}-k_2 e_{m,n}=0.\end{cases} \tag{22}$$

式(22)特征方程为

$$\begin{cases}\omega^2\lambda^2+(1-\omega)\omega\lambda-k_1=0,\\ \mu^2-(1-\omega)\mu+k_2=0.\end{cases} \tag{23}$$

根据式(23)的特征根分两种情况讨论:

1) 当$2\omega^2-2<k\leqslant 0$且$0<\omega<1$时, 令$2\omega^2-\omega<k_1<\omega$, $\omega-2<k_2<-\omega$, 则有

$$\begin{cases}\Delta_1=\omega^2(1-\omega)^2+4\omega^2k_1\geqslant 0,\\ \Delta_2=(1-\omega)^2-4k_2\geqslant 0.\end{cases} \tag{24}$$

因此, 式(22)的解为

$$\begin{cases}e_{m,n}=t_1\lambda_1^n+t_2\lambda_2^n,\\ e_{m,n}=t_3\mu_1^n+t_4\mu_2^n,\end{cases} \tag{25}$$

其中t_1,t_2,t_3,t_4是待定常数. 并且通过解式(23)的特征根, 得

$$\begin{cases}|\lambda_{1,2}|=|\dfrac{-(1-\omega)\omega\pm\sqrt{\omega^2(1-\omega)^2+4\omega^2k_1}}{2\omega^2}|<1,\\ |\mu_{1,2}|=|\dfrac{1-\omega\pm\sqrt{(1-\omega)^2-4k_2}}{2}|<1.\end{cases} \tag{26}$$

由式(26)知

$$\frac{|\lambda_{1,2}|}{|\mu_{1,2}|}=|\frac{(\omega-1)\pm\sqrt{(1-\omega)^2+4k_1}}{\omega(1-\omega)\pm\omega\sqrt{(1-\omega)^2-4k_2}}|. \tag{27}$$

当ω, k_1和k_2在允许的范围内时, $\dfrac{|\lambda_{1,2}|}{|\mu_{1,2}|}=t$. t是一个实数, 得$|\lambda_{1,2}|=t|\mu_{1,2}|$. 令$t_3=t_1t^n$, $t_4=t_2t^n$, 得式(22)的稳定解

$$e_{m,n}=t_3\mu_1^n+t_4\mu_2^n, \tag{28}$$

即$|e_{m,n}|\to 0(m\to\infty,\ n\to\infty)$. 式(22)的解也是式(21)的解, 因此式(21)解也是稳定的, 即$|e_{m,n}|\to 0$ $(m\to\infty,\ n\to\infty)$.

2) 当$\dfrac{1-2\omega}{4}<k<\dfrac{3+2\omega-\omega^2}{4}$, 且$1\leqslant\omega<3$时, 令$-\dfrac{\omega^2}{4}<k_1<-\dfrac{(1-\omega)^2}{4}$, $\dfrac{(1-\omega)^2}{4}<k_2<1$, 则

$$\begin{cases}\Delta_1<0,\\ \Delta_2<0.\end{cases} \tag{29}$$

因此, 式(22)的解为

$$\begin{cases}e_{m,n}=t_5\lambda_3^n\cos(n\theta)+t_6\lambda_3^n\sin(n\theta),\\ e_{m,n}=t_7\mu_3^n\cos(n\theta)+t_8\mu_3^n\sin(n\theta),\end{cases} \tag{30}$$

其中t_5,t_6,t_7,t_8是待定常数.

由$-\dfrac{\omega^2}{4}<k_1<-\dfrac{(1-\omega)^2}{4}$, $\dfrac{(1-\omega)^2}{4}<k_2<1$, 且$1\leqslant\omega<3$知

$$\begin{cases}\lambda_3=\dfrac{\sqrt{2(1-\omega)^2+4k_1}}{2\omega}<1,\\ \mu_3=k_2<1.\end{cases} \tag{31}$$

由式(31)知

$$\frac{\lambda_3}{\mu_3}=\frac{\sqrt{2(1-\omega)^2+4k_1}}{2\omega k_2}. \tag{32}$$

ω, k_1和k_2在允许范围内时, $\dfrac{\lambda_3}{\mu_3}=t$. t为实数, 即$\lambda_3=t\mu_3$. 令$t_7=t_5t^n$, $t_8=t_6t^n$, 则式(22)的解为

$$e_{m,n}=t_7\mu_3^n\cos(n\theta)+t_8\mu_3^n\sin(n\theta). \tag{33}$$

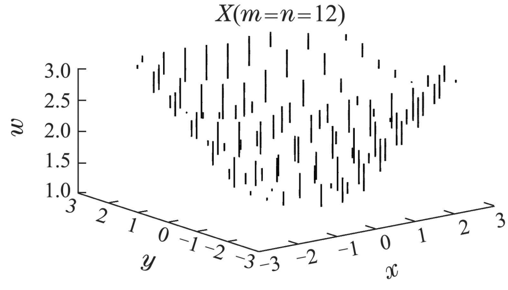
这个解是稳定的, 即$|e_{m,n}|\to 0$ $(m\to\infty, n\to\infty)$. 式(22)的解也是式(21)的解, 则式(21)解为稳定的, 即$|e_{m,n}|\to 0(m\to\infty, n\to\infty)$.

综上所述, 驱动系统(10)和响应系统(11)从任意初值出发的轨迹均可以达到全局渐近同步. 证毕.

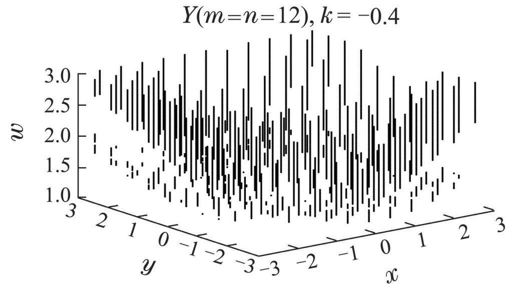
例 1 系统(10)中: $c=0.75+0.15\mathrm{i}$, $1<\omega<3$, 令$k=-0.4$, 初始参数$c_{0,0}=-0.55-0.55\mathrm{i}$, MATLAB计算精度16位, 本文取4位小数位数. 迭代12步时, 即$m=n=12$时, 驱动系统(10)和响应系统(11)的空间Julia集如图1(a)–(b)所示. 迭代20步时, 即$m=n=20$时, 驱动系统(10)和响应系统(11)的空间Julia集如图1(c)–(d). 迭代80步时,驱动系统(10)和响应系统(11)的空间Julia集如图1(e)–(f).

由图1知, 随着迭代步骤m,n的增加, 驱动系统

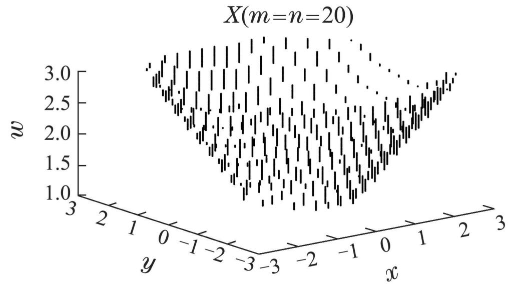
(10)和响应系统(11)的空间Julia集渐近同步.



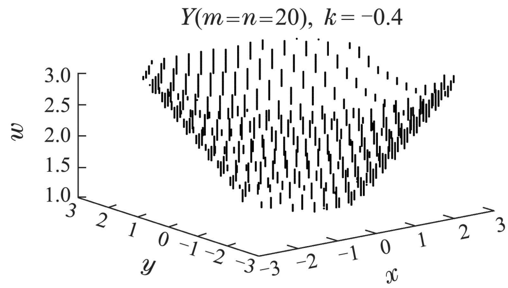
(a)　$m=n=12$时, 系统(10)的空间Julia集



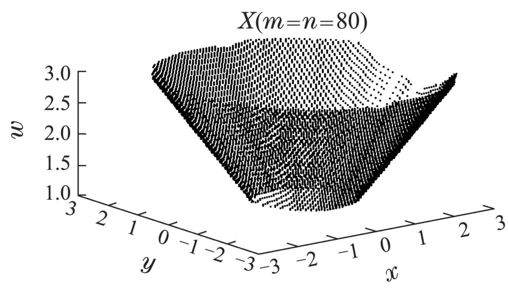
(b)　$m=n=12$时, 系统(11)的空间Julia集



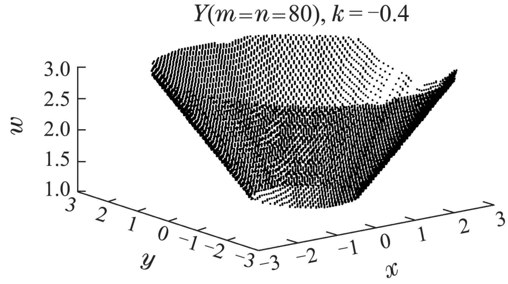
(c)　$m=n=20$时, 系统(10)的空间Julia集



(d)　$m=n=20$时, 系统(11)的空间Julia集



(e)　$m=n=80$时, 系统(10)的空间Julia集



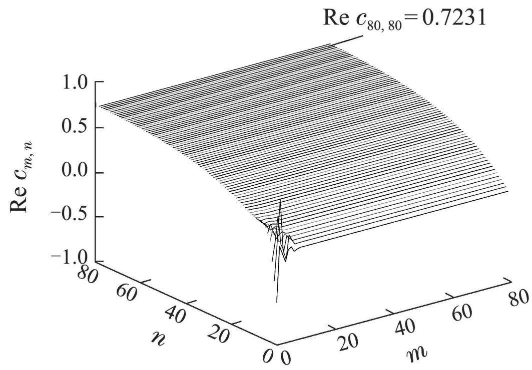
(f)　$m=n=80$时, 系统(11)的空间Julia集

图 1　$k=-0.4$ 时, 驱动系统(10)和相应系统(11)的空间Julia集

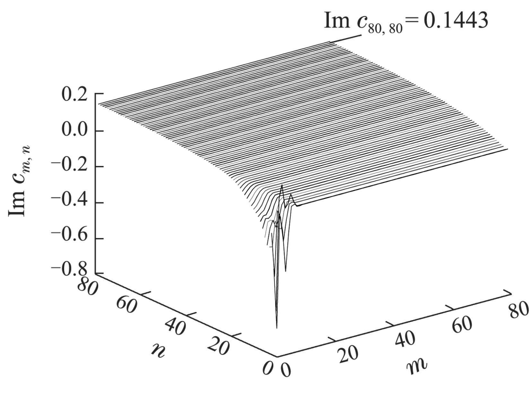
Fig. 1　The spatial Julia set of the target system (10) and the response system (11) at $k=-0.4$

当$k=-0.4$时, 响应系统(11)的参数$c_{m,n}$实部辨识过程和虚部辨识过程如图2所示. 驱动系统(10)和响应系统(11)的误差$|e_{m,n}|$的变化过程如图3所示.

由图2、图3知, 随着迭代次数的增加, 参数$c_{m,n}$的实部和虚部值分别稳定在0.7231和0.1443, 误差$e_{m,n}$的实部和虚部渐近趋于零. 因此响应系统(11)和驱动系统(10)实现渐近同步, 且辨识出驱动系统(10)的未知参数c.



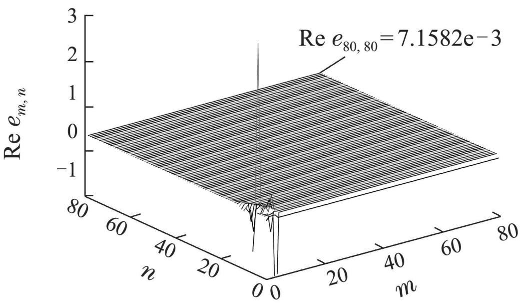
(a)　响应系统 (11)参数$c_{m,n}$实部辨识过程



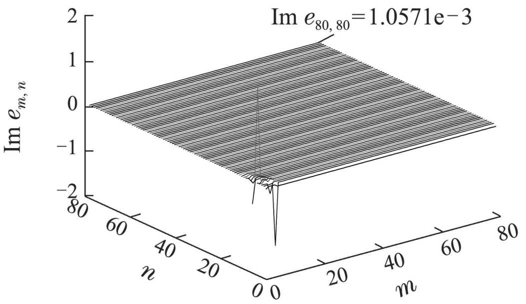
(b)　响应系统 (11)参数$c_{m,n}$虚部辨识过程

图 2　$k=-0.4$, 响应系统(11)的参数$c_{m,n}$实部和虚部辨识过程

Fig. 2　The identification process of $c_{m,n}$ of the response system (11) at $k=-0.4$



(a) 系统(10)和(11)的误差$e_{m,n}$实部变化过程



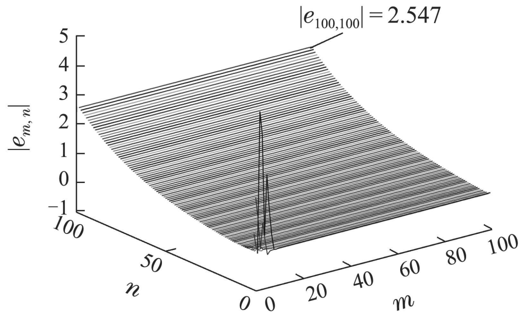
(b) 系统(10)和(11)的误差$e_{m,n}$虚部变化过程

图 3 $k=-0.4$, 驱动系统(10)和响应系统(11)的误差$|e_{m,n}|$的变化过程

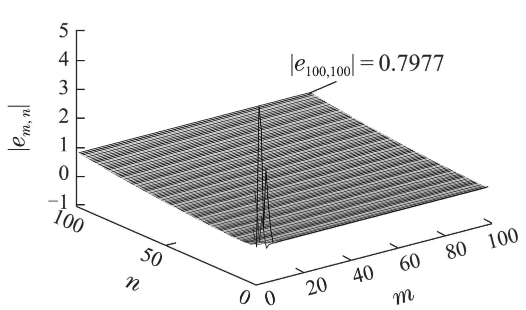
Fig. 3 The $e_{m,n}$ between systems (10) and (11) changing with $k=-0.4$

当k的取值逐渐减小, 驱动系统(10)和响应系统(11)的误差$|e_{m,n}|$的变化过程如图4所示.

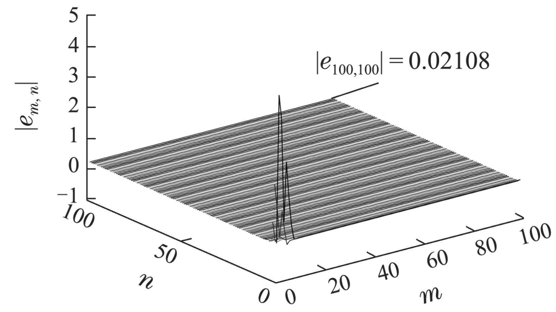
由图4知, 当k的取值越来越小, 误差$|e_{m,n}|$趋向于0的速度越来越快, 辨识效果越来越好.



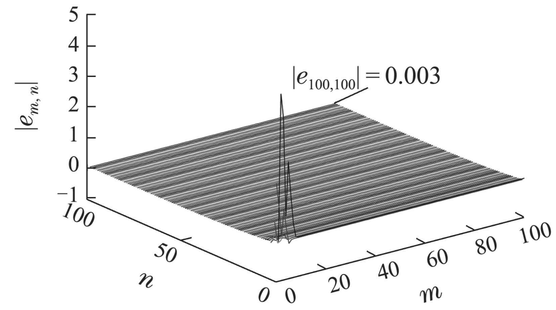
(a) $k=0.2637$



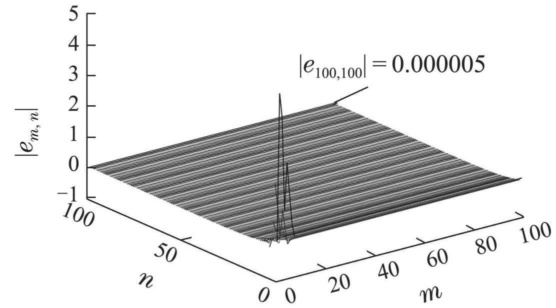
(b) $k=0.1394$



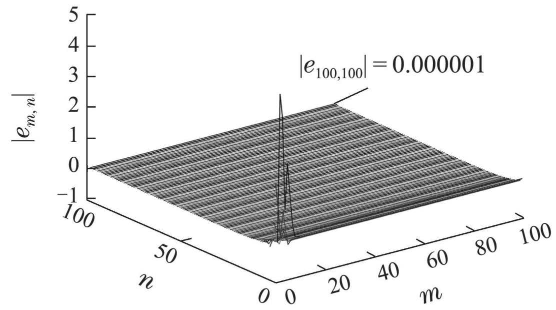
(c) $k=0.0020$



(d) $k=-1.0862$



(e) $k=-0.9623$

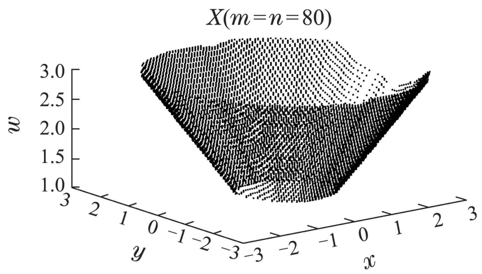


(f) $k=-0.4113$

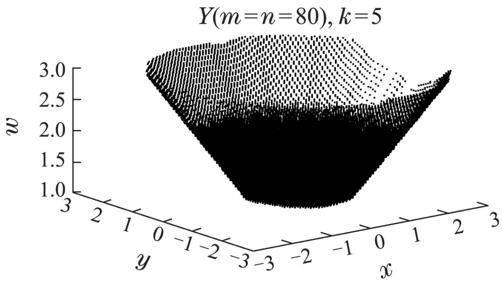
图 4 k值逐渐减小, 驱动系统(10)和响应系统(11)的误差$|e_{m,n}|$的变化过程

Fig. 4 The $|e_{m,n}|$ between systems (10) and (11) changing with k when k becomes smaller

当$k=5$时, 迭代80步, 驱动系统(10)和响应系统(11)的空间Julia集如图5(a)–(b).



(a) 驱动系统(10)的空间Julia集

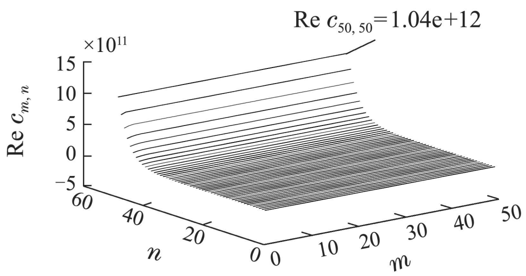


(b) 响应系统(11)的空间Julia集

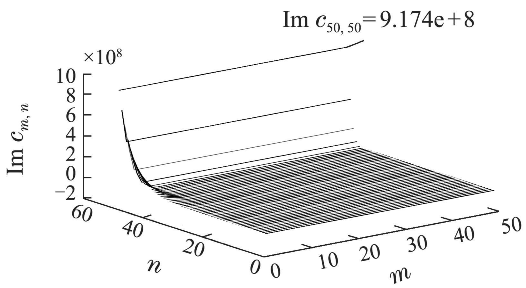
图 5 $k=5,\ m=n=80$, 驱动系统(10)和响应系统(11)的空间Julia集

Fig. 5 The spatial Julia sets of systems (10) and (11) at $k=5$ and $m=n=80$

当$k=5$时, 响应系统(11)的参数$c_{m,n}$实部辨识过程和虚部辨识过程如图6所示, 驱动系统(10)和响应系统(11)的误差$e_{m,n}$变化过程如图7所示.



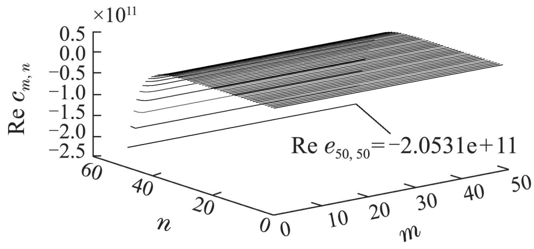
(a) 响应系统(11)参数$c_{m,n}$实部辨识过程



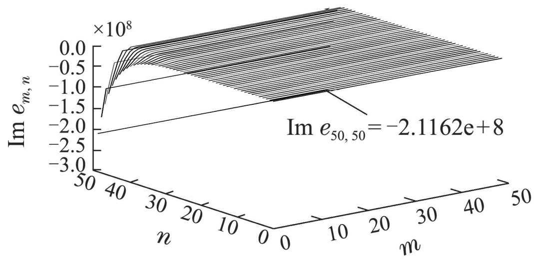
(b) 响应系统(11)参数$c_{m,n}$虚部辨识过程

图 6 $k=5$, 响应系统(11)的参数$c_{m,n}$实部和虚部的辨识过程

Fig. 6 The identification process of $c_{m,n}$ of the response system (11) at $k=5$.



(a) 驱动系统(10)和响应系统(11)的误差$e_{m,n}$实部变化过程



(b) 驱动系统(10)和响应系统(11)的误差$e_{m,n}$虚部变化过程

图 7 $k=5$, 驱动系统(10)和响应系统(11)的误差$e_{m,n}$变化过程

Fig. 7 The $e_{m,n}$ between systems (10) and (11) changing with $k=5$

由仿真结果知, 随着迭代次数的增加, 响应系统(11)的参数$c_{m,n}$实部和虚部趋于无穷大, 因此驱动系统(10)和响应系统(11)不能实现同步, 也无法辨识参数c. 误差$e_{m,n}$实部和虚部也不趋于0.

3 基本Julia集的同步控制器及参数辨识器的设计

特别地, 令空间分形Julia集驱动系统(10)和响应系统(11)中$\omega=0,\ n=n_0$, 讨论其最基本Julia集$z_{m+1,n_0}=z_{m,n_0}^2+c$的参数辨识问题. 此时驱动系统和响应系统形式分别如下:

$$x_{m+1,n_0}=x_{m,n_0}^2+c, \tag{34}$$

$$y_{m+1,n_0}=y_{m,n_0}^2+c_{m,n_0}+u_{m,n_0}. \tag{35}$$

令驱动–响应系统之间的误差变量为

$$e_{m,n_0}=x_{m,n_0}-y_{m,n_0}. \tag{36}$$

同步控制器u_{m,n_0}的结构为

$$u_{m,n_0}=x_{m,n_0}^2-y_{m,n_0}^2. \tag{37}$$

参数辨识器的结构为

$$c_{m+1,n_0}-c_{m,n_0}=ke_{m,n_0}, \tag{38}$$

其中k为$0<k<1$的常数, 则驱动系统(40)和响应系统(41)从任意初始值出发均可达到全局渐近同步[17–18].

4 结论

本文研究了一类空间分形集Julia集的辨识控制问

题. 提出了一种新方法实现驱动响应系统同步控制, 并解决了空间分形Julia集的参数辨识问题. 该方法是将差分方程稳定性的性质应用于空间分形Julia集辨识控制当中, 成功的解决了在驱动系统参数未知情况下, 实现驱动响应系统的同步控制. 同时设计了自适应同步控制器和参数辨识器, 实现了驱动响应系统渐近的达到同步过程中辨识出驱动系统未知参数. 另外, 本文特别地讨论了最基本的Julia集参数辨识和同步控制问题. 本文为将空间分形Julia集更好的应用于实际提供了一定的理论基础. 下一步笔者会改进辨识方法来得到更好的辨识效果, 并尽力寻找最优解.

参考文献:

[1] MANDELBROT B B. *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman, 1982.

[2] WANG Ling, ZHENG Dazhong, LI Qingsheng. Survey on chaotic optimization methods. *Computing Technology and Automation*, 2001, 20(1): 1 – 5.
(王凌, 郑大钟, 李清生. 混沌优化方法的研究进展. 计算技术与自动化, 2001, 20(1): 1 – 5.)

[3] LIU Z Z, WANG X Y, WANG M J. Variations of the epidemic distribution with some characteristic parameters. *Chinese Physics B*, 2012, 21(7): 611 – 616.

[4] SUN F Y, LÜ Z W. Cryptographic spatial chaos sequence. *Acta Physica Sinica*, 2011, 60(4): 60 – 65.

[5] WANG Ling, ZHENG Dazhong. A kind of chaotic neural network optimization algorithm based on annealing strategy. *Control Theory & Applications*, 2000, 17(1): 139 – 142.
(王凌, 郑大钟. 一种基于退火策略的混沌神经网络优化算法. 控制理论与应用, 2000, 17(1): 139 – 142.)

[6] WANG X Y, XIE Y X, QIN X. Cryptanalysis of an ergodic chaotic encryption algorithm. *Chinese Physics B*, 2012, 21(4): 159 – 165.

[7] WANG Xingyuan, MENG Qingye. Study on the physical meaning for generalized Mandelbrot-Julia sets based on the Langevin problem. *Acta Physica Sinica*, 2004, 53(2): 388 – 395.
(王兴元, 孟庆业. 基于Langevin问题探讨广义M–J集的物理意义. 物理学报, 2004, 53(2): 388 – 395.)

[8] WANG X Y, LIU W, YU X J. Research on Brownian movement based on generalized Mandelbrot-Julia sets from a class complex mapping system. *Modern Physics Letters B*, 2007, 21(20): 1321 – 1341.

[9] ZHANG Y P, SUN W H, LIU C A. Control and synchronization of second Julia sets. *Chinese Physics B*, 2010, 19(5): 146 – 153.

[10] LIU P, LIU S T. Control and coupling synchronization of Julia sets in coupled map lattice. *Indian Journal of Physics*, 2012, 86(6): 455 – 462.

[11] LIU P, LIU C A. Linear generalized synchronization of spatial Julia sets. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2011, 21(5): 1281 – 1291.

[12] WANG P , LIU S T. The gradient control of spatial-alternated Julia sets. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 80(3): 1291 – 1302.

[13] WANG P, LIU S T. Optimal control and synchronization of alternated Julia sets. *Asian Journal of Control*, 2016, 18(5): 1698 – 1705.

[14] WANG D, LIU S T. Synchronization between the spatial Julia sets of complex lorenz system and complex Henon map. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 81(3): 1197 – 1205.

[15] LIU S, CHEN G. On spatial lyapunov exponents and spatial chaos. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2003, 13(5): 1163 – 1181.

[16] SUI Shougang. *Spatial fractal Julia sets of complex dynamic systems*. Jinan: Shandong University, 2005.
(隋首钢. 复动力系统的空间分形Julia集. 济南: 山东大学, 2005.)

[17] SUN Jie, LIU Shutang, QIAO Wei. Parameter identification of generalized Julia sets. *Acta Physica Sinica*, 2011, 60(7): 70510 – 070510.
(孙洁, 刘树堂, 乔威. 广义Julia集的参数辨识. 物理学报, 2011, 60(7): 120 – 128.)

[18] SUN J, LIU S T. A new identification control for generalized Julia sets. *Chinese Physics B*, 2013, 22(5): 050505.

作者简介:

孙 洁 博士, 副教授, 目前研究方向为非线性系统的混沌、分形理论的应用与控制, E-mail: sunj@sdu.edu.cn;

乔 威 博士, 工程技术应用研究员, 目前研究方向为混沌理论与非线性动力系统的控制、分形的控制和应用等, E-mail: qiaowei@sdu.edu.cn;

孙伟华 博士, 副教授, 目前研究方向包括一般拓扑学、混沌理论与非线性动力系统的控制、分形的控制和应用等, E-mail: whsun@sdu.edu.cn.