

时滞Chen混沌系统的指数同步及在保密通信中的应用

谢英慧^{1,2}, 孙增圻^{1,3}

(1. 清华大学 计算机科学与技术系 智能技术与系统国家重点实验室, 北京 100084;

2. 沈阳炮兵学院 基础部, 辽宁 沈阳 110163; 3. 空间智能控制技术国家级重点实验室, 北京 100080)

摘要: 针对一类参数未知的时滞Chen混沌系统, 研究了其指数同步问题. 利用Lyapunov稳定理论设计了指数同步控制器和参数自适应律, 基于线性矩阵不等式技术给出了其指数同步的充分条件. 利用所提出的指数同步方法解决了保密通信问题, 且更符合实际情况. 所设计的控制器是实用有效, 易于实现. 仿真示例验证了该方法的有效性.

关键词: Chen混沌系统; 时滞; 指数同步; 未知参数; 保密通信

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Exponential synchronization for delayed Chen chaotic systems and applications to secure communications

XIE Ying-hui^{1,2}, SUN Zeng-qi^{1,3}

(1. State Key Laboratory of Intelligent Technology and System, Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. Department of Foundation, Shenyang Artillery Institute, Shenyang Liaoning 110163, China;

3. National Laboratory of Space Intelligent Control, Beijing 100080, China)

Abstract: For a class of delayed Chen chaotic systems with unknown parameters, the scheme of its exponential synchronization is discussed. Based on Lyapunov stability theory, an exponential synchronization controller and adaptive laws of parameters are designed. A sufficient condition of exponential synchronization is then given by using the linear matrix inequality technique. The proposed method is also applied to secure communications. The designed controller is easily implemented in practice. An illustrative example is used to demonstrate the effectiveness of the presented method.

Key words: Chen chaotic system; delayed; exponential synchronization; unknown parameters; secure communication

1 引言(Introduction)

自从1990年Pecora和Carroll^[1]提出了混沌同步的原理, 并在电路中得以实现以来, 混沌的高度类随机性、对初值的敏感依赖性及其宽频谱性质, 使得它在保密通信、扩频通信中有极好的应用前景^[2~5]. 对于混沌保密通信, 大量的研究集中在只有一个正的Lyapunov指数的低维混沌系统, 这样的系统由于复杂性不高, 在保密通信中很容易被破译. 对于具有多个正的Lyapunov指数的高维系统(非时滞超混沌系统), 它产生的时间序列具有高随机性^[6], 但非时滞超混沌系统的结构往往变得复杂, 对于实际应用是非常不利的. 而时滞混沌系统产生多个正的Lyapunov指数的个数不再受系统维数的限制, 时滞混沌系统的这个特征使它特别适用于保密通信^[7,8]. 将时滞混沌系统应用在保密通信中已成为人

们研究的热门话题.

目前人们已经提出了各种各样的混沌同步方法, 比如驱动-响应混沌同步方法、自适应混沌同步方法、变结构混沌同步方法、脉冲混沌同步方法、滞后混沌同步方法等^[9~13]. 但如果能让响应系统与驱动系统以较快的速度(如指数收敛速度)达到同步并将这种混沌指数同步的方法应用在保密通信中, 将具有理论和实际意义.

本文主要针对一类参数未知的时滞混沌系统的指数同步问题, 利用Lyapunov稳定理论和线性矩阵不等式技术给出了一个指数同步的条件, 设计了指数同步控制器和参数自适应律, 并利用这种混沌指数同步解决保密通信的问题.

2 问题描述(Problem description)

考虑如下时滞Chen混沌系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a(x_2(t) - x_1(t)), \\ \dot{x}_2(t) = (c - a)x_1(t) - x_1(t)x_3(t) + \\ \quad (c - d)x_2(t) + dx_2(t - \tau), \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t)x_2(t) - bx_3(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中 a, b, c 和 d 是系统的参数. 当参数取值为

$$a = 35, b = 3, c = 28, d = 3, \tau = 0.1$$

时, 系统(1)将产生混沌现象, 如图1所示.

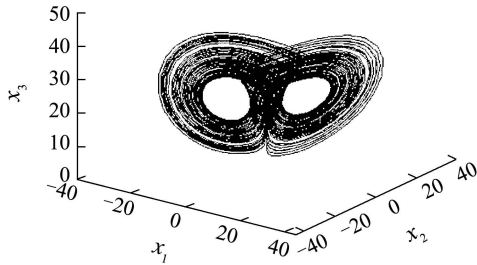


图1 当 $a = 35, b = 3, c = 28, d = 3, \tau = 0.1$ 时的时滞Chen混沌系统(1)的相轨迹图

Fig. 1 Phase trajectory of delayed Chen chaotic system(1) when $a = 35, b = 3, c = 28, d = 3, \tau = 0.1$

假设系统(1)为驱动系统, 而响应系统的数学表达式为

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = \hat{a}(y_2(t) - y_1(t)) + u_1, \\ \dot{y}_2(t) = (\hat{c} - \hat{a})y_1(t) - y_1(t)y_3(t) + \\ \quad (\hat{c} - \hat{d})y_2(t) + \hat{d}y_2(t - \tau) + u_2, \\ \dot{y}_3(t) = y_1(t)y_2(t) - \hat{b}y_3(t) + u_3. \end{cases} \quad (2)$$

其中: $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$ 是系统待估计的参数, u_1, u_2, u_3 是待设计的控制器, 它控制驱动系统(1)和响应系统(2)指数同步.

令 $e(t) = y(t) - x(t)$ 表示同步误差信号. 控制器 $u(t)$ 设计为误差反馈控制, 即

$$u(t) = Ke(t) = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

其中: K 为控制增益矩阵, 它能够使响应混沌系统(2)的轨迹指数同步驱动混沌系统(1)的轨迹.

注1 控制器采用式(3)的形式, 只考虑本通道的状态信息, 设计简单, 便于实现.

假设1 根据混沌系统的有界性, 设 $|x_2| \leq M_{c2}$, $|x_3| \leq M_{c3}$, 其中 M_{c2}, M_{c3} 可以从仿真中得到.

定义1 如果存在 $\theta > 0$ 和 $\rho > 0$, 对于系统的每一个 $e(t)$ 解, 满足下列不等式:

$$\|e(t)\| \leq \rho e^{-\theta t} \sup_{-\tau \leq \lambda \leq 0} \{\|e(\lambda)\|\}, \quad \forall t > 0. \quad (4)$$

则该系统是指数稳定的, 其中: θ 是指数收敛率, $\|\cdot\|$ 表示欧几里德范数.

选取控制器为(3)的形式, 令驱动-响应系统之间的误差变量为

$$e_1(t) = y_1(t) - x_1(t),$$

$$e_2(t) = y_2(t) - x_2(t),$$

$$e_3(t) = y_3(t) - x_3(t),$$

$$e_2(t - \tau) = y_2(t - \tau) - x_2(t - \tau).$$

故由式(1)和(2)可得误差系统如下:

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = a(e_2(t) - e_1(t)) + (a - \hat{a})(y_1(t) - y_2(t)) + k_1 e_1(t), \\ \dot{e}_2(t) = (c - a)e_1(t) - (c - \hat{c} - a + \hat{a})y_1(t) + \\ \quad (c - d)e_2(t) - e_1(t)e_3(t) - \\ \quad (c - \hat{c} - d + \hat{d})y_2(t) - \\ \quad e_3(t)x_1 - e_1(t)x_3 + k_2 e_2(t) + \\ \quad de_2(t - \tau) - (d - \hat{d})y_2(t - \tau), \\ \dot{e}_3(t) = e_1(t)e_2(t) + e_1(t)x_2 + e_2(t)x_1 - \\ \quad be_3(t) + (b - \hat{b})y_3(t) + k_3 e_3(t), \end{cases} \quad (5)$$

并且令 $e(\lambda) = [e_1(\lambda) \ e_2(\lambda) \ e_3(\lambda)]^T = \varphi(\lambda)$, $\lambda \in [-\tau, 0]$.

3 指数同步控制器的设计(Exponential synchronization controller design)

定理1 若假定 $\varphi(\lambda) \neq 0$, 选取控制器的形式为式(3), 且满足下列矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} 2p(\theta + k_1 - a) & pM_{c3} & p(M_{c2} + c) \\ pM_{c3} & \Omega & 0 \\ p(M_{c2} + c) & 0 & 2p(\theta + k_3 - b) \end{bmatrix} < 0. \quad (6)$$

其中: p, q, θ 为正数, $\Omega = 2p\theta + 2p(c - d + k_2) + q + q^{-1}p^2d^2e^{2\theta\tau}$, 并且选择如下的参数自适应律:

$$\begin{cases} \dot{\hat{a}} = e^{2\theta t} p(e_1(t)(y_1(t) - y_2(t)) + e_2(t)y_1(t)), \\ \dot{\hat{b}} = e^{2\theta t} p e_3(t)y_3(t), \\ \dot{\hat{c}} = -e^{2\theta t} p(e_2(t)y_1(t) + e_2(t)y_2(t)), \\ \dot{\hat{d}} = e^{2\theta t} p(e_2(t)y_2(t) - e_2(t)y_2(t - \tau)), \end{cases} \quad (7)$$

则驱动时滞Chen混沌系统(1)和响应时滞Chen混沌系统(2)指数同步.

证 设 $e_a = a - \hat{a}$, $e_b = b - \hat{b}$, $e_c = c - \hat{c}$, $e_d =$

$d - \hat{d}$ 为参数 $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ 和 $\hat{d}$ 的估计误差, 选择Lyapunov函数为

$$V(e(t)) = e^{2\theta t} p (e_1^2(t) + e_2^2(t) + e_3^2(t)) + \int_{t-\tau}^t e^{2\theta s} q e_2^2(s) ds + (e_a^2 + e_b^2 + e_c^2 + e_d^2). \quad (8)$$

则它沿系统(5)的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) = & e^{2\theta t} \{2\theta p(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + 2p(e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 + e_3\dot{e}_3) + qe_2^2 - e^{-2\theta\tau} qe_{2\tau}^2\} + \\ & 2e_a\dot{e}_a + 2e_b\dot{e}_b + 2e_c\dot{e}_c + 2e_d\dot{e}_d = \\ & e^{2\theta t} \{2\theta p(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + qe_2^2 + 2pe_1(a(e_2 - e_1) + e_a(y_1 - y_2) + k_1e_1) + \\ & 2pe_3(e_1e_2 + e_1x_2 + e_2x_1 - be_3 + e_by_3 + k_3e_3) + 2pe_2((c - a)e_1 - (e_c - e_a)y_1 + (c - d + k_2)e_2(t) - (e_c - e_d)y_2 - e_1e_3 - e_3x_1 - e_1x_3 - e^{-2\theta\tau} qe_{2\tau}^2 + de_{2\tau} - e_dy_{2\tau})\} - \\ & 2e_a\dot{\hat{a}} - 2e_b\dot{\hat{b}} - 2e_c\dot{\hat{c}} - 2e_d\dot{\hat{d}}. \end{aligned} \quad (9)$$

将式(7)代入式(9)中, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) = & e^{2\theta t} \{2\theta p(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + qe_2^2 - e^{-2\theta\tau} qe_{2\tau}^2 + 2p((k_1 - a)e_1^2 + (k_3 - b)e_3^2 + (c - d + k_2)e_2^2 + e_1e_3x_2 + e_1e_2c - e_1e_2x_3 + e_2de_{2\tau})\} = \\ & e^{2\theta t} \{2p(\theta + k_1 - a)e_1^2 + (2p\theta + 2p(c - d + k_2) + q)e_2^2 + 2p(e_1e_3x_2 + e_1e_2c - e_1e_2x_3) + 2p(\theta + k_3 - b)e_3^2 + 2pe_2de_{2\tau} - e^{-2\theta\tau} qe_{2\tau}^2\} \leq \\ & e^{2\theta t} \{2p(\theta + k_1 - a)e_1^2 + (2p\theta + 2p(c - d + k_2) + q)e_2^2 + 2p(e_1e_3x_2 + e_1e_2c - e_1e_2x_3) + 2p(\theta + k_3 - b)e_3^2 + q^{-1}e^{2\theta\tau} p^2 d^2 e_2^2\} \leq \\ & e^{2\theta t} \{2p(\theta + k_1 - a)e_1^2 + 2p(\theta + k_3 - b)e_3^2 + (2p\theta + 2p(c - d + k_2) + q)q^{-1}p^2 d^2 e^{2\theta\tau} e_2^2 + 2p(\|e_1e_3\|(M_{c2} + c) + \|e_1e_2\|M_{c3})\} = e^T \Omega e. \end{aligned} \quad (10)$$

根据式(6), 即 $\Omega < 0$, 所以得到 $\dot{V}(e(t)) < 0$.

考虑式(10), 可以得到 $V(e(t)) < V(e(0))$, 并且

$$\begin{aligned} V(e(0)) = & p(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + \int_{-\tau}^0 e^{2\theta s} q e_2^2(s) ds + (e_a^2 + e_b^2 + e_c^2 + e_d^2) \leq \\ & p\|\varphi\|^2 + q\|\varphi\|^2 \frac{1}{2k}(1 - e^{-2\theta\tau}) + (e_a^2 + e_b^2 + e_c^2 + e_d^2). \end{aligned} \quad (11)$$

令 $\eta > 0$ 是一个有界的标量, 则上式可写为

$$V(e(0)) \leq \eta \sup_{-\tau \leq \lambda \leq 0} \{\|e(\lambda)\|^2\}.$$

又因为

$$V(e(t)) \geq e^{2\theta t} p \|e(t)\|^2,$$

所以得到

$$e^{2\theta t} p \|e(t)\|^2 \leq \eta \sup_{-\tau \leq \lambda \leq 0} \{\|e(\lambda)\|^2\}, \quad (12)$$

即

$$\|e(t)\| \leq \rho e^{-\theta t} \sup_{-\tau \leq \lambda \leq 0} \{\|e(\lambda)\|\}. \quad (13)$$

其中 $\rho = \eta p^{-1}$. 根据定义1, 则误差系统(5)是指数稳定的, 即驱动时滞Chen混沌系统(1)和响应时滞Chen混沌系统(2)指数同步. 证毕.

4 数值仿真(Simulations)

根据定理1, 在仿真中, 驱动系统的初始条件为 $x_0 = [5, 5, 15]^T$, 响应系统的初始条件为 $y_0 = [4, 4, 12]^T$. 由图1中可知 $M_{c2} = 40$, $M_{c3} = 50$. 选取待估计的参数初始值为 $\hat{a} = 30$, $\hat{b} = 4$, $\hat{c} = 20$, $\hat{d} = 5$. 当 $\theta = 0.1$ 时, 解LMI得

$$p = 0.0113, q = 2.9692, k_1 = -248.3982, k_2 = -385.3451, k_3 = -261.0354,$$

同步误差 e 随时间的变化曲线如图2所示. 由图中可知, 同步误差逐渐趋于零值, 即驱动时滞Chen混沌系统(1)和响应时滞Chen混沌系统(2)指数同步.

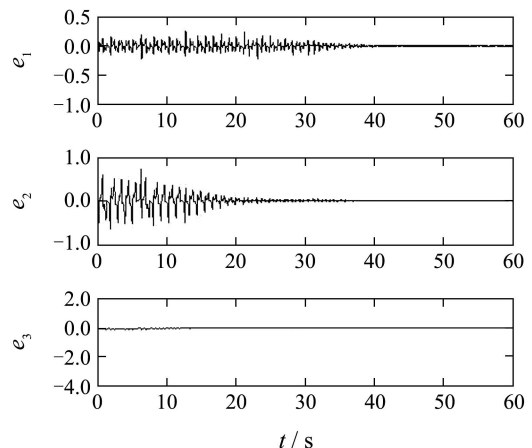


图2 误差曲线

Fig. 2 The error curves

5 保密通信中的混沌指数同步(Exponential synchronization for secure communications)

仍以时滞Chen混沌系统为例, 将前面提到的指数同步方法应用到混沌保密通信中. 图3表示由一个发送器(即驱动系统)和一个接收器(即响应系统)组成的通信系统. 保密通信的方法是运用驱动系统的输出来遮掩要传输的有用信号, 也就是把要传输的有用信号加在驱动系统产生的混沌信号上, 生成混合类噪声信号, 同时被发送到信道中, 接收端接收从信道中传来的信号, 接收器再通过混沌指数同步方案分离其中的混沌信号进而恢复出原有用信号.

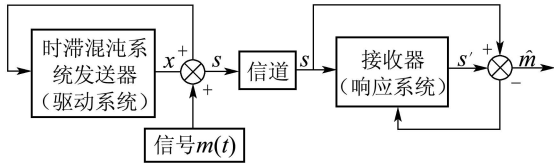


图3 基于指数同步时滞混沌系统的保密通信

Fig. 3 Secure communication systems based on exponential synchronization

在这个通信过程中, 首先要进行时滞混沌系统的指数同步, 然后再在接收信号中恢复要传输的有用信号. 由此可知, 发送端应是一个由式(1)描述的混沌系统, 为便于分析, 写成如下形式^[14]:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + f(x, t) + Bx(t - \tau), \\ s(t) &= C^T x(t) + \varepsilon m(t).\end{aligned}\quad (14)$$

其中: $s(t)$ 是发射端系统的输出, 且 $C^T = [0 \ 1 \ 0]^T$, 即 $m(t)$ 是一个要传输的有用信号, 并被系统的输出所掩盖, 因此 $s(t) \in \mathbb{R}$ 是一个信道中的被传输的混合类噪声信号. 基于指数同步的方法, 接收器形式如下构造:

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= Ay(t) + f(y, t) + By(t - \tau), \\ s'(t) &= C^T y(t).\end{aligned}\quad (15)$$

其中 $s'(t)$ 是接收端系统的输出. 而指数同步控制器和参数自适应律都由式(6)和(7)给出, 则有

$$\hat{m}(t) = \varepsilon^{-1} (s(t) - s'(t)). \quad (16)$$

其中 $\hat{m}(t)$ 是接收端恢复出的信号. 运用式(14)和(15), 得到

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{m}(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon^{-1} (s(t) - s'(t)) = \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon^{-1} (C^T x(t) + \varepsilon m(t) - C^T y(t)) &= \\ \lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon^{-1} C^T e(t) + m(t)) &= m(t).\end{aligned}\quad (17)$$

因此, 要传送的有用信号在接收器能够准确恢复出来, 达到保密通信的目的.

图4~图7给出了当传送信号 $m(t) = \sin(2t)$, $\varepsilon = 0.55$ 时, 基于指数同步方法实现保密通信的仿真结果. 其中图4表示要传输的有用信号 $m(t)$ 加在驱动系统产生的混沌信号上所生成的混合类噪声信号 $s(t)$; 图5表示要传输的有用信号 $m(t)$; 图6表示驱动系统和响应系统的输出 $x(t)$ 和 $y(t)$; 图7表示在接收器恢复的有用信号 $\hat{m}(t)$. 从仿真结果可以看到, 经过一个暂态过程之后, 此系统能够很成功的恢复要传送的有用信号, 完成保密通信的任务.

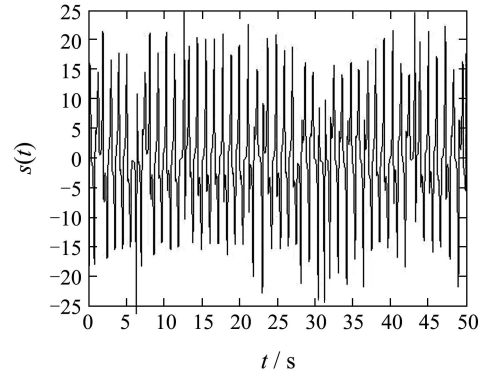


图4 发射端发出的信号 $s(t)$

Fig. 4 Signal $s(t)$ in the transmitter

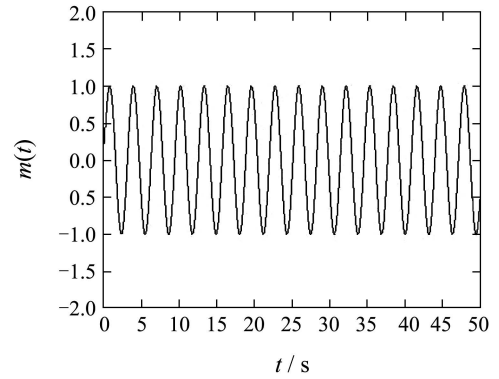


图5 要传输的信号 $m(t)$

Fig. 5 Transmitted signal $m(t)$

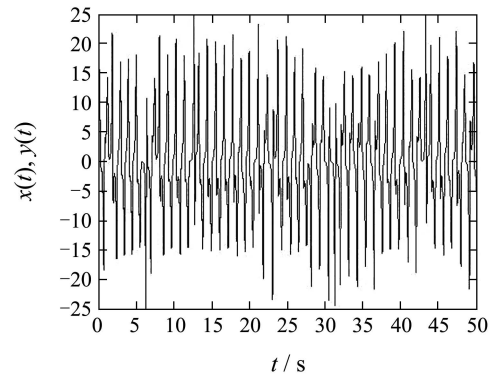
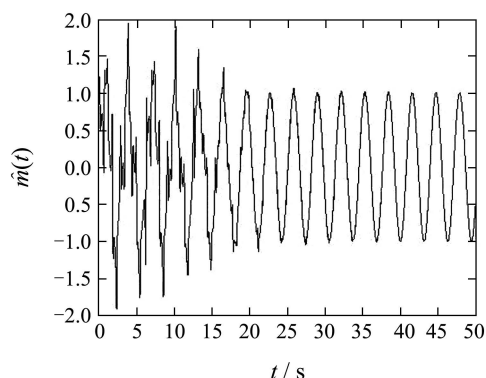


图6 驱动系统和响应系统的输出 $x(t)$ 和 $y(t)$

Fig. 6 Output $x(t)$ and $y(t)$ of drive system and respond system

图7 接收器恢复的信号 $\hat{m}(t)$ Fig. 7 The recovered signal $\hat{m}(t)$ in the receiver

6 结论(Conclusions)

本文主要研究了一类参数未知的时滞混沌系统的指数同步问题, 采用驱动—响应同步方法, 利用Lyapunov稳定理论和线性矩阵不等式技术, 给出了时滞混沌系统的指数同步的充分条件和指数同步控制器的设计方法, 及参数自适应律的解析表达式, 并将这种混沌系统指数同步方法应用于通信中, 使要传送的有用信号在接收器能够准确恢复出来, 达到保密通信的目的. 数值仿真表明, 所设计的控制器是实用有效, 易于实现.

参考文献(References):

- [1] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in chaotic systems[J]. *Physical Review Letter*, 1990, 64(8): 821 – 824.
- [2] GRZYBOWSKI J M V, RAFIKOV M, BALTHAZAR J M. Synchronization of the unified chaotic system and application in secure communication[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009, 14(6): 2793 – 2806.
- [3] NANA B, WOAFO P, DOMNGANG S. Chaotic synchronization with experimental application to secure communications[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009, 14(5): 2266 – 2276.
- [4] BOWONG S, MOUKAM K F M, SIEWE S M. Secure communication via parameter modulation in a class of chaotic systems[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2007, 12(3): 397 – 410.
- [5] ZHENG G, BOUTAT D, FLOQUET T, et al. Secure communication based on multi-input multi-output chaotic system with large message amplitude[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2009, 4(13): 1510 – 1517.
- [6] DING M Z, DING E J, DITTO W L, et al. Control and synchronization of chaos in high dimensional systems: review of some recent results[J]. *Chaos*, 1997, 7(4): 644 – 652.
- [7] BAI E, LONNGREN K E, UQAR A. Secure communication via multiple parameter modulation in a delayed chaotic system[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, 23(3): 1071 – 1076.
- [8] MOEZ F. An adaptive chaos synchronization scheme applied to secure communication[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2003, 18(1): 141 – 148.
- [9] YANG X S, DUAN C K, LIAO X X. A note on mathematical aspects of drive-response type synchronization[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 1999, 10(9): 1457 – 1462.
- [10] YIN X H, REN Y, SHAN X M. Synchronization of discrete spatiotemporal chaos by using variable structure control[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2002, 14(7): 1077 – 1082.
- [11] CHEN S H, LU J H. Synchronization of an uncertain unified chaotic system via adaptive control[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2002, 14(4): 643 – 647.
- [12] WANG Y W, GUAN Z H, XIAO J W. Impulsive control for synchronization of a class of continuous systems[J]. *Chaos*, 2004, 14(1): 199 – 203.
- [13] LI C D, LIAO X F, ZHANG R. A unified approach for impulsive lag synchronization of chaotic systems with time delay[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, 23(4): 1177 – 1184.
- [14] KOCAREV L, TASEV Z, PARLITZ U. Synchronizing spatiotemporal chaos of partial differential equations[J]. *Physical Review Letter*, 1997, 79(3): 51 – 54.

作者简介:

谢英慧 (1972—), 女, 讲师, 博士, 主要研究领域为混沌控制与保密通信、航天器智能自主控制, E-mail: xyh8367@163.com;

孙增圻 (1943—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为智能系统理论、机器人与复杂航天器的智能自主控制, E-mail: szq-dcs@mail.tsinghua.edu.cn.