

全速度差跟驰模型的Lyapunov稳定性分析

李永福, 孙棣华, 崔明月

(重庆大学 自动化学院, 重庆 400044)

摘要: 车辆跟驰模型是智能交通系统(intelligent transportation system, ITS)中研究微观交通流的一个主要内容, 而稳定性分析则是跟驰模型研究的一个重要问题. 为了有效分析跟驰模型的稳定性, 本文从控制理论的角度出发, 针对典型的全速度差(full velocity difference, FVD)跟驰模型, 提出了基于Lyapunov函数的稳定性分析. 随后对FVD模型进行了数值仿真, 结果表明了本方法的有效性.

关键词: 智能交通系统; 跟驰模型; Lyapunov函数; 稳定性分析

中图分类号: TP391.9 **文献标识码:** A

Lyapunov stability analysis for the full velocity difference car-following model

LI Yong-fu, SUN Di-hua, CUI Ming-yue

(College of Automation, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: Car-following model is an important part for microscopic traffic flow in the intelligent transportation system(ITS), and the stability analysis is one of the key issues in car-following theory. To make an effective stability analysis, the present paper, from the control theory viewpoint, conducts the stability analysis based on the Lyapunov function for the full velocity difference(FVD) model. In the final, the simulation is carried out, and results validate the effectiveness of this method.

Key words: intelligent transportation system; car-following model; Lyapunov function; stability analysis

1 引言(Introduction)

近年来, 随着世界经济的发展, 交通量日益剧增, 导致交通流中各种车辆的独立性越来越小, 车辆之间的相互作用加强. 因此, 研究交通流中前后车辆之间的作用关系已成为目前交通研究的重要课题之一. 跟驰模型是研究微观交通流问题的主要方法, 已经取得许多进展^[1~12].

1995 年, Bando^[4] 等人提出了一种优化速度(optimal velocity, OV)模型, 该模型是一个简单且被广泛应用的车辆跟驰模型, 因此国内外学者基于OV模型做了一系列研究^[4~12]. 1998年, Helbing和Tilch等人根据实测数据对OV模型的参数进行辨识, 发现OV模型中存在加速度过高和减速度与实际不相符等问题. 由于OV模型中减速和加速过程是均衡对称的, 考虑相对速度对减速及加速过程的不同作用, Helbing和Tilch提出了广义优化速度模型, 即GF(general force)模型^[5]. GF模型虽然克服

了OV模型中存在的问题, 但其仅考虑了负速度差对车辆动力学的影响, Treiber等人指出当前车比跟驰车快很多时, 尽管车头间距小于安全间距, 跟驰车辆也不会减速, 这一现象用OV模型和GF模型都无法解释^[6]. 因此, 2002年, 姜锐等人基于正负速度差对跟驰车辆的影响提出了全速度差模型, 即FVD(full velocity difference)模型^[7]. 同时, 薛郁等人提出了考虑车辆相对运动速度的车辆跟驰模型, 并且利用线性稳定性分析和数值模拟, 讨论了相对运动速度在交通流演化过程中的稳定作用^[8,9].

然而, 以上研究对跟驰模型稳定性的讨论均是从流体力学的角度来进行的, 尚无从控制理论的角度来分析交通流的稳定性问题. 而交通系统本质上是一个非线性、强耦合的复杂系统, 为了有效分析跟驰模型的稳定性问题, 本文基于控制理论的相关知识, 用系统的观点来对FVD模型进行基于Lyapunov函数的稳定性分析, 并给出了相应的数值仿真.

收稿日期: 2009-11-16; 收修改稿日期: 2010-04-19.

基金项目: 中央高校基本科研业务费资助项目(CDJXS10170002); 教育部高等学校博士点基金资助项目(20090191110022); 国家“863”计划资助项目(2006AA04A124).

2 跟驰模型(Car-following model)

1995年, Bando^[4]基于驾驶员总是试图寻求一种安全速度的假设, 这种安全速度是由跟驰车辆与前车的车头间距而决定的. 在引入优化速度(optimal velocity)的概念后, 提出了一种优化速度模型, 即OV(optimal velocity)模型:

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = k[V(\Delta x_i(t)) - v_i(t)], i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

其中 $x_i(t) > 0$, $v_i(t) > 0$ 和 $\frac{dv_i(t)}{dt}$ 分别表示第 i 辆车的位置、速度和加速度, 单位分别为m, m/s和m/s². t 表示时间, 单位为s, $N > 0$ 且 $N \in \mathbb{N}$ 是系统中车辆总数, $k > 0$ 且 $k \in \mathbb{R}$ 为敏感系数, 单位为s⁻¹, $\Delta x_i(t) = x_{i+1}(t) - x_i(t)$ 表示 t 时刻前车与跟驰车的空间车头间距, 下标 i 为车辆标号(第 i 辆车跟随第 $i+1$ 辆车). $V(\cdot)$ 为优化速度函数, 是 $\Delta x_i(t)$ 的函数, 它是单调递增且有上界的. 其常用形式为^[4]

$$V(\Delta x_i(t)) = \frac{v_{\max}}{2} [\tanh(\Delta x_i(t) - x_c) + \tanh(x_c)], \quad (2)$$

其中: $v_{\max}$ 为车辆的最大速度, x_c 为安全间距, $\tanh(\cdot)$ 是双曲正切函数.

1998年, Helbing和Tich^[5]使用实测数据对OV模型进行了辨识, 发现OV模型会产生过高的加速度以及不切实际的减速度且有可能出现碰撞现象. 为了解决OV模型中存在的问题, 他们认为负速度差对跟驰车辆的加速度变化的影响不容忽视, 于是提出了一种广义力(general force, GF)模型^[5], 即

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = k[V(\Delta x_i(t)) - v_i(t)] + \lambda H(-\Delta v_i(t)) \Delta v_i(t), \quad (3)$$

其中: $H(\cdot)$ 为Heaviside阶梯函数, $\lambda \geq 0$ 且 $\lambda \in \mathbb{R}$ 为速度差的反应系数, 单位为s⁻¹, 速度差 $\Delta v_i(t) = v_{i+1}(t) - v_i(t)$.

遗憾的是, 无论是OV模型还是GF模型, 都无法解释Treiber等^[6]描述的现象, 即当前车的速度远大于跟驰车辆时, 则即使当车头间距小于安全间距时, 跟驰车辆也不会减速, 因为车头间距将会不断的增大. 鉴于此, 2002年, 姜锐^[7]基于正负速度差对跟驰车辆的影响提出了全速度差模型, 即FVD(full velocity difference)模型:

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = k[V(\Delta x_i(t)) - v_i(t)] + \lambda \Delta v_i(t), \quad (4)$$

其中 $k > 0$ 且 $k \in \mathbb{R}$ 是司机的敏感系数, 单位为s⁻¹, $\lambda \geq 0$ 且 $\lambda \in \mathbb{R}$ 为速度差的反应系数, 单位为s⁻¹, 速度差 $\Delta v_i(t) = v_{i+1}(t) - v_i(t)$. 随后的仿真实验证

明FVD模型比OV模型及GF模型具有更好的动态性能^[7]. 基于FVD模型, 许多学者作了进一步的深入研究, 且取得了大量的成果^[10~12].

3 稳定性分析(Stability analysis)

交通系统的稳定性分析是跟驰模型研究中的一个重要问题, 交通流的稳定性描述的是交通系统中车辆以安全的速度与车头间距自由行驶的一种能力, 换言之, 交通流越是稳定, 则车辆越不易发生拥挤或碰撞现象, 从而有效的缓解交通堵塞现象.

为了有效的分析FVD模型的稳定性, 本文从控制理论的角度展开研究, 先引入如下构造Lyapunov函数的引理:

引理 1 对于一个如下所述的二阶系统:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} u, \quad (5)$$

其中: $a, b, c, d, m, n \in \mathbb{R}$, x_1, x_2 为系统的状态变量. 当 $a \leq 0, d \leq 0$, 且 $bc < 0$ 时, 则该系统必存在一个如下形式的Lyapunov函数:

$$E(x) = px_1^2 + qx_2^2,$$

其中 $p, q \in \mathbb{R}$ 且 $p > 0, q > 0$.

证 对于系统, 选取李雅普诺夫函数:

$$E(x) = \xi(x_1 + x_2)^2 + \psi(x_1 - x_2)^2 + px_1^2 + qx_2^2, \quad (6)$$

其中 $\xi, \psi, p, q \in \mathbb{R}$, 且 $\xi \geq 0, \psi \geq 0, p > 0, q > 0$. 则有

$$\begin{aligned} \dot{E}(x) = & 2[(a+c)\xi + (a-c)\psi + ap]x_1^2 + \\ & 2[(a+b+c+d)\xi + (b+c-a-d)\psi + \\ & bp + cq]x_1x_2 + \\ & 2[(b+d)\xi + (d-b)\psi + dq]x_2^2. \end{aligned} \quad (7)$$

保证 $\dot{E}(x) \leq 0$ 的一个充分条件为

$$\begin{cases} (a+b+c+d)\xi + (b+c-a-d)\psi + bp + cq = 0, \\ (a+c)\xi + (a-c)\psi + ap \leq 0, \\ (b+d)\xi + (d-b)\psi + dq \leq 0, \end{cases} \quad (8)$$

为了简化计算, 一般可令 $\xi = \psi = 0$, 则式简化为

$$\begin{cases} bp + cq = 0, \\ ap \leq 0, \\ dq \leq 0, \end{cases} \quad (9)$$

可见, 当 $a \leq 0, d \leq 0, p > 0, q > 0$, 且 $bc < 0$ 时, 只需取 $p = c, q = -b$, 或 $p = -c, q = b$ 式便可以成立. 此时该系统的Lyapunov函数为

$$E(x) = \begin{cases} (-c)x_1^2 + bx_2^2, p = -c, q = b, \\ c < 0, b > 0, \\ cx_1^2 + (-b)x_2^2, p = c, q = -b, \\ c > 0, b < 0, \end{cases} \quad (10)$$

由于 b, c 异号, 故可以保证 $p > 0, q > 0$, 从而保证该系统存在一个符合条件的Lyapunov函数:

$$E(x) = px_1^2 + qx_2^2. \quad (11)$$

定理 1 对于FVD模型, 当 $k > 0, \lambda \geq 0$ 时, 则FVD模型是Lyapunov稳定的.

证 为了进行稳定性分析, 根据Konishi提出的方法^[13,14], 将FVD模型改写成如下形式:

$$\begin{cases} \frac{d^2x_i(t)}{dt^2} = k[V(y_i(t)) - \frac{dx_i(t)}{dt}] + \lambda\Delta v_i(t), \\ y_i(t) = \Delta x_i(t) = x_{i+1}(t) - x_i(t), \\ \Delta v_i(t) = v_{i+1}(t) - v_i(t), \end{cases} \quad (12)$$

其中 $i = 1, \dots, N$, 模型(12)可以进一步改写成如下:

$$\begin{cases} \frac{dv_i(t)}{dt} = k[V(y_i(t)) - v_i(t)] + \lambda(v_{i+1}(t) - v_i(t)), \\ \frac{dy_i(t)}{dt} = v_{i+1}(t) - v_i(t). \end{cases} \quad (13)$$

假设头车以恒定的初速度 v_0 行驶, 则跟驰车辆行驶的稳定状态为^[14]

$$[v_i^*(t) \ y_i^*(t)]^T = [v_0 \ V^{-1}(v_0)]^T, \quad (14)$$

因此将系统(13)在稳定状态(14)附近线性化可以得到如下的系统:

$$\begin{cases} \frac{d\delta v_i(t)}{dt} = k[\Lambda\delta y_i(t) - \delta v_i(t)] + \lambda(\delta v_{i+1}(t) - \delta v_i(t)), \\ \frac{d\delta y_i(t)}{dt} = \delta v_{i+1}(t) - \delta v_i(t), \end{cases} \quad (15)$$

其中 $\delta v_i(t) = v_i(t) - v_0$, $\delta y_i(t) = y_i(t) - V^{-1}(v_0)$. Λ 是OV函数在 $y_i(t) = V^{-1}(v_0)$ 处的斜率, 即:

$$\Lambda = \frac{dV(y_i(t))}{dy_i(t)} \Big|_{y_i(t)=V^{-1}(v_0)}.$$

选择 $\delta v_i(t)$ 和 $\delta y_i(t)$ 作为状态变量, 则系统(15)的状态空间表达式可以表示为:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{d\delta v_i(t)}{dt} \\ \frac{d\delta y_i(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k - \lambda k \Lambda \\ -1 \quad 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_i(t) \\ \delta y_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \delta v_{i+1}(t), \\ \delta v_i(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \delta v_i(t) \\ \delta y_i(t) \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (16)$$

令

$$P = [\delta v_i(t) \ \delta y_i(t)]^T, A = \begin{bmatrix} -k - \lambda k \Lambda & k \Lambda \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T,$$

则式(16)可以表示为

$$\begin{cases} \dot{P} = AP + B\delta v_{i+1}(t), \\ \delta v_i(t) = CP. \end{cases} \quad (17)$$

根据引理1可知, 选取如下的Lyapunov函数:

$$E(x) = \delta v_i(t)^2 + k\Lambda\delta y_i(t)^2, \quad (18)$$

则

$$\begin{aligned} \dot{E}(x) &= 2\delta v_i(t)[(-k - \lambda)\delta v_i(t) + k\Lambda\delta y_i(t)] + \\ &\quad 2k\Lambda\delta y_i(t)(-\delta v_i(t)) = \\ &\quad -2(k + \lambda)\delta v_i(t)^2. \end{aligned} \quad (19)$$

当 $k > 0, \lambda \geq 0$ 时, $k + \lambda > 0$, 所以有 $\dot{E}(x) < 0$. 故FVD模型是Lyapunov稳定的.

4 数值仿真(Numerical simulation)

一般来说, 在跟驰理论中, 跟驰车辆的行为变化一般是根据前车的运行状态的变化来作出的. 如果将前车运行状态的变化视为一种刺激, 那么跟驰车辆的加速或减速行为则可以看作是相应的响应. 因此, 第 i 辆车的运动方程可以描述为^[15]

$$[\text{响应}]i \propto [\text{刺激}]i. \quad (20)$$

考虑跟驰模型中第 $(i+1)$ 辆车的速度与第 i 辆车的速度之间的关系, 如下图1所示.

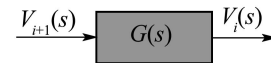


图 1 连续两辆车之间的关系

Fig. 1 The relation between two successive vehicles

根据图1, 从控制的角度可以得出如下的传递函数来描述, 即:

$$V_i(s) = G(s)V_{i+1}(s), \quad (21)$$

其中:

$$\begin{aligned} V_n(s) &= L(\delta v_n(t)), \\ V_{n+1}(s) &= L(\delta v_{n+1}(t)). \end{aligned}$$

$L(\cdot)$ 表示相应变量的Laplace变换. 根据控制理论的相关知识^[14], 由式(17)可以导出 $G(s)$ 为

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B =$$

$$\begin{aligned} [1 \ 0] \begin{bmatrix} s+k+\lambda-k\lambda \\ 1 \\ s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} = \\ \frac{\lambda s + k\lambda}{d(s)} = \frac{\lambda s + k\lambda}{s^2 + (k+\lambda)s + k\lambda}. \end{aligned} \quad (22)$$

根据Konishi在文献[13,14]中提出的方法,有如下的定义:

定义 1^[13,14] 假设式(22)中的特征多项式 $d(s)$ 是稳定的,如果传递函数 $G(s)$ 的 H_∞ 范数大于1,即

$$\|\bar{G}(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in [0, \infty)} |\bar{G}(i\omega)| > 1, \quad (23)$$

则FVD模型中将出现交通拥挤现象.

为了比较参数对系统性能的影响,分别取

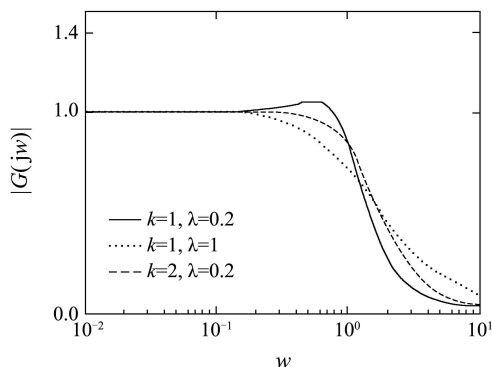
$$k = 1 \text{ s}^{-1}, \lambda = 0.2 \text{ s}^{-1};$$

$$k = 1 \text{ s}^{-1}, \lambda = 1 \text{ s}^{-1};$$

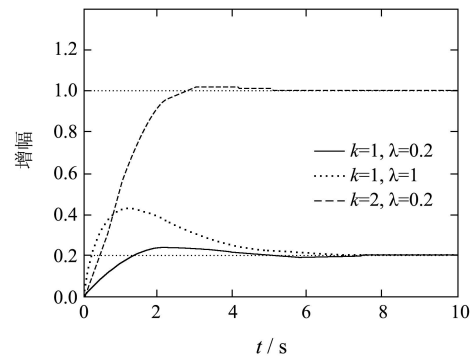
$$k = 2 \text{ s}^{-1}, \lambda = 0.2 \text{ s}^{-1}.$$

图2(a)表示的是系统传递函数 $G(s)$ 的增益曲线 $|G(j\omega)|$,由图可知:对于参数 $k = 1 \text{ s}^{-1}, \lambda = 0.2 \text{ s}^{-1}$,增益曲线存在一个峰值,但立即下降直至衰减为0;对于参数 $k = 1 \text{ s}^{-1}, \lambda = 1 \text{ s}^{-1}$,增益曲线不存峰值,但衰减速度较慢,可见在保持参数 k 的值不变的情况下,增大参数 λ 的值有利于改善系统的性能;对于参数 $k = 2 \text{ s}^{-1}, \lambda = 0.2 \text{ s}^{-1}$,增益曲线亦不存峰值,且衰减速度较快,可见在保持参数 λ 的值不变的情况下,增大参数 k 的值有利于改善系统的性能,且参数 k 的值起主要作用.根据定义1,表明该模型中不会出现严重的交通拥挤现象,亦即交通流是稳定的.图2(b)则表示的是系统的阶跃响应曲线,由此图可知3种参数情况下,FVD模型描述的交通流系统均是稳定的,但从超调量及上升速度等动态性能指标分析,系统在参数 $k = 2 \text{ s}^{-1}, \lambda = 0.2 \text{ s}^{-1}$ 下的性能较优.

因此,从图2及定义1可以得出如下结论:在上述3种参数下,FVD模型描述的交通流系统均是稳定的,与上文中的理论分析一致,且系统在参数 $k = 2 \text{ s}^{-1}, \lambda = 0.2 \text{ s}^{-1}$ 下的综合性能较优.



(a) 增益曲线



(b) 阶跃响应

图2 系统传递函数 $G(s)$ 的特性

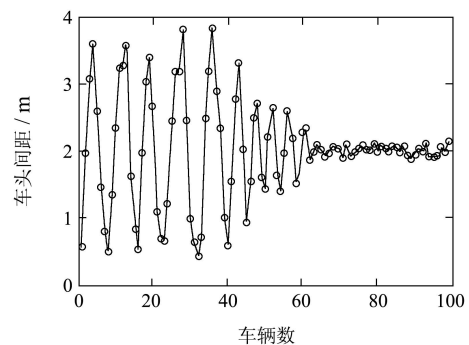
Fig. 2 The characteristic of the transfer function $G(s)$

图3和图4分别为各车辆在 $t = 100 \text{ s}$ 和 $t = 500 \text{ s}$ 时的车头间距与速度分布情况,此时参数设置如下:

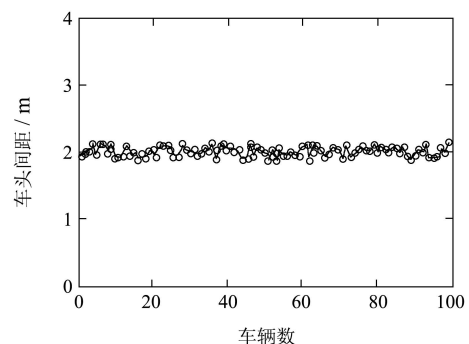
$$k = 2 \text{ s}^{-1}, \lambda = 0.2 \text{ s}^{-1}, x_c = 2 \text{ m},$$

$$v_0 = 0.964 \text{ m/s}, v_{\max} = 2 \text{ m/s}, N = 100.$$

图3(a)和图4(a)分别表示时间 $t = 100 \text{ s}$ 时的车头间距与速度分布情况,此时车头间距与速度均逐渐由振荡情形演化成平稳情形,直至当 $t = 500 \text{ s}$ 时,车头间距分布稳定在2 m小范围内波动,而速度分布稳定在0.964 m/s小范围内波动,均趋于平稳分布,分别如图3(b)和图4(b)所示.车头间距与速度的分布趋势也表明了交通流逐渐趋于稳定,这与上述理论分析相一致.



(a) $t = 100 \text{ s}$



(b) $t = 500 \text{ s}$

图3 各车辆的车头间距分布情况

Fig. 3 The headway distribution of each vehicle

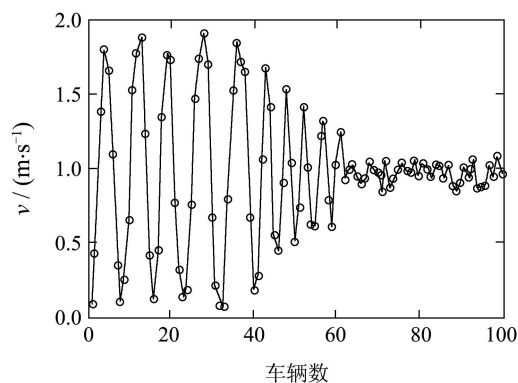
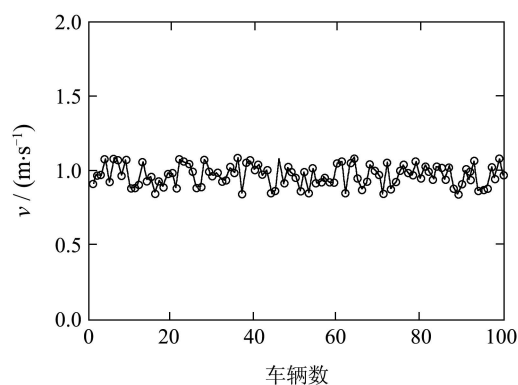
(a) $t = 100 \text{ s}$ (b) $t = 500 \text{ s}$

图 4 各车辆的速度分布情况

Fig. 4 The velocity distribution of each vehicle

5 结论(Conclusion)

跟驰模型是智能交通系统中研究微观交通流的一类重要模型. 针对典型的FVD跟驰模型, 为了进行有效的稳定性分析, 与传统的分析方法不同, 本文从控制理论的角度出发, 提出了基于Lyapunov函数的稳定性分析, 并给出了相应的数值仿真, 仿真结果表明了本方法的有效性. 针对本文给出的3对参数, 仿真结果表明系统在 $k = 2 \text{ s}^{-1}$, $\lambda = 0.2 \text{ s}^{-1}$ 下的综合性能较优.

参考文献(References):

- [1] LIGHTHILL M H, WHITHAM G B. On kinematics wave II: a theory of traffic flow on long crowded roads[J]. *Proceeding of the Royal Society*, 1955, A229(1178): 281 – 345.
- [2] RICHARDS P I. Shock waves on the highway[J]. *Operations Research*, 1956, 4(1): 42 – 51.
- [3] PAYNE H J. Models of freeway traffic and control[J]. *Mathematical Methods of Public Systems*, 1971, 1(1): 51 – 61.
- [4] BANDO M, HASED K, NAKYAAMA A, et al. Dynamics model of traffic congestion and numerical simulation[J]. *Physics Review E*, 1995, 51(2): 1035 – 1042.
- [5] HELBING D, TILCH B. Generalized force model of traffic dynamics[J]. *Physics Review E*, 1998, 58(1): 133 – 138.
- [6] TREIBE M R, HENNECKE A, HELBING D. Derivation, properties and simulation of a gas-kinetic-based nonlocal traffic model[J]. *Physics Review E*, 1999, 59(1): 239 – 253.
- [7] JIANG R, WU Q S, ZHU Z J. A new continuum model for traffic flow and numerical tests[J]. *Transportation Research, Part B*, 2002, 36(5): 405 – 419.
- [8] 薛郁. 随机计及相对速度的交通流跟驰模型[J]. *物理学报*, 2003, 52(11): 2750 – 2756.
(XUE Yu. A car-following model with stochastically considering the relative velocity in traffic flow[J]. *Acta Physica Sinica*, 2003, 52(11): 2750 – 2756.)
- [9] 薛郁, 董力耘, 袁以武, 等. 考虑车辆相对速度的交通流演化过程的数值模拟[J]. *物理学报*, 2002, 51(3): 492 – 496.
(XUE Yu, DONG Liyun, YUAN Yiwu, et al. Numerical simulation on traffic flow with the consideration of relative velocity[J]. *Acta Physica Sinica*, 2002, 51(3): 492 – 496.)
- [10] GE H X. Two velocity difference model for a car following theory[J]. *Physica A*, 2008, 387(21): 5239 – 5245.
- [11] ZHAO X M, GAO Z Y. A new car-following model: full velocity and acceleration difference model[J]. *The European Physical Journal B*, 2005, 47(1): 145 – 150.
- [12] 孙棣华, 李永福, 田川. 基于多前车位置及速度差信息的车辆跟驰模型[J]. *系统工程理论与实践*, 2010, 30(7): 1326 – 1332.
(SUN Dihua, LI Yongfu, TIAN Chuan. Car-following model based on the information of multiple ahead & velocity difference[J]. *System Engineering Theory & Practice*, 2010, 30(7): 1326 – 1332.)
- [13] KONISHI K, KOKAME H, HIRATA K. Coupled map car-following model and its delayed-feedback control[J]. *Physic Review E*, 1999, 70(4): 4000 – 4007.
- [14] KONISHI K, KOKAME H, HIRATA K. Decentralized delayed-feedback control of an optimal velocity traffic model[J]. *The European Physical Journal B*, 2000, 15(4): 715 – 722.
- [15] WENG Y L, WU T J. Car-following model for vehicular traffic[J]. *Journal of Zhejiang University-Science A*, 2002, 3(4): 412 – 417.

作者简介:

李永福 (1983—) 男, 博士研究生, 主要从事智能交通系统与非线性控制等相关研究, E-mail: laf1212@163.com, 本文通信作者;

孙棣华 (1962—) 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事智能交通系统、计算机控制与管理等相关研究, E-mail: d3sun@163.com;

崔明月 (1974—) 男, 博士研究生, 主要从事智能控制与交通诱导等相关研究, E-mail: cuimingyue@sina.com.