文章编号: 1000−8152(2010)12−1750−07

模糊离散广义系统的鲁棒容许条件: 严格LMI方法

袁宇浩, 张广明

(南京工业大学 自动化与电气工程学院, 江苏 南京 210009)

摘要: 研究了T-S模糊离散广义系统的鲁棒容许性问题. 对于开环标称系统, 基于严格线性矩阵不等式(LMI)给出了容许性判别条件. 进而基于此条件并引入新的矩阵变量, 得到严格线性矩阵不等式形式的鲁棒控制器设计方案. 使得通过反馈控制, 闭环系统在不确定性范围内是正则、因果、稳定的. 最后通过算例仿真验证方法的有效性.

关键词: 不确定离散广义系统; T-S模糊模型; 容许性条件; 线性矩阵不等式(LMI)

中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Robust admissible condition of fuzzy discrete descriptor systems: strict LMI approach

YUAN Yu-hao, ZHANG Guang-ming

(School of Automation and Electrical Engineering, Nanjing University of Technology, Nanjing Jiangsu 210009, China)

Abstract: The robust admissible conditions for T-S fuzzy discrete descriptor systems are investigated. Based on the new strict linear matrix inequalities(LMIs), the admissible conditions for open-loop nominal system are given. By introducing a new matrix variable, we established the sufficient conditions in terms of strict LMIs for robust controller design; the closed-loop system is regular, causal and stable for all parameter uncertainties. Numerical examples are provided to illustrate the effectiveness of the proposed design method.

Key words: discrete descriptor systems with uncertainties; T-S fuzzy model; admissible condition; linear matrix inequality(LMI)

1 引言(Introduction)

近30年来，广义系统理论已经取得了蓬勃的发展. 对于由状态空间模型描述的广义系统, LMI方法在其分析与综合问题的研究中应用的非常广泛[1~3]. 但是由于广义系统自身的特点, 这些研究成果给出的LMI条件往往含有等式约束或半定LMI, 这类LMI条件称之为非严格LMI. 由于目前比较通用的求解LMI的工具MATLAB不能够直接对这种非严格LMI进行求解, 因此非严格LMI为进一步的数值求解带来了不便. 关于将广义系统非严格LMI条件转化为严格LMI条件的研究已经取得了一些成果[4~6].

近年来, T-S模糊模型作为一种本质非线性模型, 以其逼近精度较高, 并可借助线性系统理论研究非线性系统等优点广泛应用于控制领域. 1999年, Taniguchi和Tanaka等人将T-S模糊模型推广到非线性广义系统中[7], 提出模糊广义系统的概念, 并分析了系统稳定性. 目前, 模糊广义系统稳定性的研究成果大多是针对连续广义系统进行的，对离散广义系统来说, 其稳定性的研究成果还较少. 原因之一在于缺乏有效的工具对该类系统进行分析; 原因之二在于模糊广义离散系统的稳定性分析既要考虑其稳定性又要考虑其正则性和因果性, 而这个问题在正常离散系统中是不出现的. 文献[8]采用迭代映射的方法, 构造一系列映射, 通过寻找矩阵列的收敛点来获得最终的解. 在文中构造的不等式中也含有等式约束, 而且该算法较复杂. 文献[9]选取了较保守的Lyapunov函数避免了等式约束的出现, 进而通过矩阵范数给出了模糊离散广义系统的容许性条件. 文献[10, 11]均只考虑了容许性分析问题, 没有涉及到控制器的设计问题. 严格来说, 他们给出的条件不便于进行控制器的设计. 文献[12]虽然研究了离散模糊广义系统的H_∞控制问题, 但在矩阵分解的过程中

收稿日期: 2010−05−05; 收修改稿日期: 2010−07−05.

基金项目: 南京工业大学学科基金资助项目(39710004); 江苏省工业装备数字制造及控制技术重点实验室资助项目(BM2007201); 南京工业大学研究生精品课程项目(《智能控制》).

选取形式较为特殊的待求矩阵, 为问题的求解带来一定的保守性.

结合上述的研究成果, 本文工作之一为寻求判断模糊离散广义系统的容许性条件的严格LMI形式; 工作之二为引入新的自由矩阵变量, 将容许性条件进行改进, 以便于进一步设计控制器.

本文主要结论在第3, 4部分给出: 首先给出标称系统容许性条件的普遍形式, 并给出此条件的严格LMI形式; 引入新的矩阵变量得到闭环系统在不确定性范围内正则、因果、稳定的判别方法, 将鲁棒控制器的设计归结为求取严格LMI. 最后通过数值仿真验证方法的有效性.

符号含义: 本文中$X>0\ (X\geqslant 0)$表示X是正定(半正定)矩阵, $A-B>(\geqslant)0$表示$A>(\geqslant)B$, I表示单位矩阵, 未具体指明维数的矩阵均具适当的维数.

2 模型描述及相关定义(Model formulation and correlative definations)

考虑T-S模型描述的不确定离散广义系统. 模型的第i条规则为:

$$R_i: \text{If } z_1(k) \text{ is } N_{i1} \text{ and} \cdots z_p(k) \text{ is } N_{ip} \text{Then}$$
$$Ex(k+1)=[A_i+\Delta A_i]x(k)+[B_i+\Delta B_i]u(k), \tag{1}$$

其中: N_{ij}是模糊集, $z_1(k),z_2(k),\cdots,z_p(k)$为前件变量, 前件变量可以为状态或者可测外部变量的函数. r为模糊规则数目. $E\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\operatorname{rank}E=q\leqslant n$. $x(t)\in\mathbb{R}^n$为系统状态. $u(t)\in\mathbb{R}^m$为控制输入. $A_i\in\mathbb{R}^{n\times n}, B_i\in\mathbb{R}^{n\times m}, i=1,2,\cdots,r$. 系统的不确定性为$\Delta A_i$,$\Delta B_i$, 具有如下形式:

$$[\Delta A_i\ \ \Delta B_i]=MF[E_{ai}\ \ E_{bi}],$$

其中: M,E_{ai},E_{bi}为已知常数矩阵; F为未知的有界矩阵函数, 且满足$F^{\mathrm T}F\leqslant I$.

运用单点模糊化, 乘机推理和中心加权平均解模糊方法, 则全局模糊系统可表示为

$$\mathrm{E}x(k+1)=\sum_{i=1}^{r}h_i(z(k))\{[A_i+\Delta A_i]x(k)+[B_i+\Delta B_i]u(k)\}, \tag{2}$$

其中:

$$h_i(z(k))=\prod_{j=1}^{p}N_{ij}(z_j(k))/\sum_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{p}N_{ij}(z_j(k)),$$
$$\sum_{i=1}^{r}h_i(z(k))=1.$$

$N_{ij}(z_j(k))$为$z_j(k)$对于N_{ij}的隶属度. 简便起见, 下文用h_i代替$h_i(z(k)), i=1,2,\cdots,r$.

在进行系统分析之前, 首先给出一些相关定义. 考虑系统(2)的开环标称系统

$$Ex(k+1)=\sum_{i=1}^{r}h_iA_ix(k). \tag{3}$$

定义 1[10] 系统(3)是一致正则的, 如果存在$s\in C$, 使得

$$\det(sE-\sum_{i=1}^{r}h_iA_i)\neq 0, \forall k\geqslant 0.$$

定义 2[10] 系统(3)是因果的, 如果它一致正则, 并且

$$\deg_s\det(sE-\sum_{i=1}^{r}h_iA_i)=\operatorname{rank}E, \forall k\geqslant 0.$$

定义 3[10] 系统(3)是稳定的, 如果它一致正则, 并且

$$\sigma(E,\sum_{i=1}^{r}h_iA_i)\subset D(0,1), \forall k\geqslant 0,$$

其中$\sigma(E,\sum_{i=1}^{r}h_iA_i)=\{s\mid\det(sE-\sum_{i=1}^{r}h_iA_i)=0\}$, $D(0,1)$表示单位圆的开区域.

定义 4[13] 系统(3)称为容许的, 如果它是一致正则、因果、稳定的.

定义 5[13] 系统(2)称为鲁棒容许的, 如果它在不确定性范围内是一致正则、因果、稳定的.

引理 1[14] 给定适当维数的矩阵Y,H和Q, 其中Y是对称矩阵, 则

$$Y+HFQ+Q^{\mathrm T}F^{\mathrm T}H^{\mathrm T}<0,$$

对所有满足$F(k)^TF(k)\leqslant I$ 的矩阵成立, 当且仅当存在一个常数$\varsigma>0$, 使得

$$Y+\varsigma^{-1}HH^{\mathrm T}+\varsigma Q^{\mathrm T}Q<0.$$

3 开环系统的容许性条件(Admissible condition of open-loop system)

3.1 开环系统的容许性条件: 非严格矩阵不等式(Admissible condition of open-loop system: non-strict LMI)

定理 1 系统(3)是容许的, 如果存在非奇异对称矩阵P, 满足

$$EPE^{\mathrm T}\geqslant 0, \tag{4}$$
$$(\sum_{i=1}^{r}h_iA_i)P(\sum_{i=1}^{r}h_iA_i)^{\mathrm T}-EPE^{\mathrm T}<0. \tag{5}$$

证 由矩阵理论及$\operatorname{rank}E=q$, 可知存在非奇异矩阵M_1,N_1使得

$$M_1EN_1=\begin{bmatrix}I_q & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \tag{6}$$

相应于式(6), 做如下分解:

$$N_1^{-1}PN_1^{-\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}P_1 & P_2\\ P_2^{\mathrm{T}} & P_3\end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$M_1(\sum_{i=1}^{r}h_iA_i)N_1=\begin{bmatrix}\tilde{A}_1 & \tilde{A}_2\\ \tilde{A}_3 & \tilde{A}_4\end{bmatrix}. \tag{8}$$

由式(4)(6)和式(7)可知

$$\begin{bmatrix}P_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\geqslant 0,$$

从而$P_1\geqslant 0$. 进一步由式(5)∼(8), 可得

$$\begin{bmatrix}\tilde{A}_1 & \tilde{A}_2\\ \tilde{A}_3 & \tilde{A}_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1 & P_2\\ P_2^{\mathrm{T}} & P_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{A}_1 & \tilde{A}_2\\ \tilde{A}_3 & \tilde{A}_4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}-\begin{bmatrix}P_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}<0, \tag{9}$$

即

$$\begin{bmatrix}*_1 & *_2\\ *_3 & (10)_{22}\end{bmatrix}<0, \tag{10}$$

其中$*_i(i=1,2,3)$代表的式子与证明无关, $(10)_{22}=\tilde{A}_3P_1\tilde{A}_3^{\mathrm{T}}+\tilde{A}_4P_2^{\mathrm{T}}\tilde{A}_3^{\mathrm{T}}+\tilde{A}_3P_2\tilde{A}_4^{\mathrm{T}}+\tilde{A}_4P_3\tilde{A}_4^{\mathrm{T}}$. 则由$(2,2)<0$可知$\tilde{A}_4$可逆.

事实上, 如果$\tilde{A}_4$不可逆, 则$\tilde{A}_4^{\mathrm{T}}$也不可逆, 即存在非零 $x\in\mathbb{R}^n$ 满足 $\tilde{A}_4^{\mathrm{T}}x=0$. 由式 $(2,2)<0$ 可得 $x^{\mathrm{T}}\tilde{A}_3P_1\tilde{A}_3^{\mathrm{T}}x<0$, 与$\tilde{A}_3P_1\tilde{A}_3^{\mathrm{T}}\geqslant 0$矛盾, 可知$\tilde{A}_4$可逆, 系统(3)是一致正则、因果的.

对于一致正则、因果的系统, 总存在非奇异矩阵M_2,N_2, 使得

$$M_2EN_2=\begin{bmatrix}I_q & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, M_2(\sum_{i=1}^{r}h_iA_i)N_2=\begin{bmatrix}\hat{A}_1 & 0\\ 0 & I_{n-q}\end{bmatrix}. \tag{11}$$

其中$\hat{A}_1$与隶属度函数有关. 相应于(11)做如下分解

$$N_2^{-1}PN_2^{-\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\hat{P}_1 & \hat{P}_2\\ \hat{P}_2^{\mathrm{T}} & \hat{P}_3\end{bmatrix}. \tag{12}$$

与上述讨论相似, 可知$\hat{P}_1\geqslant 0$, 并且

$$\begin{bmatrix}\hat{A}_1\hat{P}_1\hat{A}_1^{\mathrm{T}}-\hat{P}_1 & \hat{A}_1\hat{P}_2\\ \hat{P}_2^{\mathrm{T}}\hat{A}_1^{\mathrm{T}} & \hat{P}_3\end{bmatrix}<0, \tag{13}$$

由式(13)可知$\hat{A}_1\hat{P}_1\hat{A}_1^{\mathrm{T}}-\hat{P}_1<0,\forall k\geqslant 0$, 从而$\hat{P}_1>0$.

事实上, 若$\hat{P}_1$为奇异的, 则存在非零$x_1\in\mathbb{R}^n$满足$x_1^{\mathrm{T}}\hat{P}_1x_1=0$, 则

$$x_1^{\mathrm{T}}(\hat{A}_1\hat{P}_1\hat{A}_1^{\mathrm{T}}-\hat{P}_1)x_1=x_1^{\mathrm{T}}\hat{A}_1\hat{P}_1\hat{A}_1^{\mathrm{T}}x_1<0,$$

与$\hat{A}_1\hat{P}_1\hat{A}_1^{\mathrm{T}}\geqslant 0$矛盾.

由离散系统的Schur稳定理论, 有$\sigma(\hat{A}_1)\subset D(0,1),\forall k\geqslant 0$. 其中$\sigma(\hat{A}_1)=\{s\mid \det(sI_q-\hat{A}_1)=0\}$. 由式(11)有

$$\begin{aligned}&\det(sE-\sum_{i=1}^{r}h_iA_i)=\\ &\det M_2^{-1}\det(-I_{n-q})\det(sI_q-\hat{A}_1)\det N_2^{-1},\end{aligned}$$

可知$\sigma(E,\sum\limits_{i=1}^{r}h_iA_i)=\sigma(\hat{A}_1)\subset D(0,1),\forall k\geqslant 0$, 因此系统(3)稳定. 证毕.

注 1 类似定理1证明, 可得到另一种表达形式的容许性条件:

$$E^{\mathrm{T}}PE\geqslant 0, \tag{14}$$

$$(\sum_{i=1}^{r}h_iA_i)^{\mathrm{T}}P(\sum_{i=1}^{r}h_iA_i)-E^{\mathrm{T}}PE<0, \tag{15}$$

待求矩阵P仍然要求为非奇异且对称.

3.2 开环系统的容许性条件: 严格矩阵不等式(Admissible condition of open-loop system: strict LMI)

将E进行满秩分解$E=E_{\mathrm{L}}E_{\mathrm{R}}$, $E_{\mathrm{L}}\in\mathbb{R}^{n\times r}$为列满秩矩阵, $E_{\mathrm{R}}\in\mathbb{R}^{r\times n}$为行满秩矩阵. 有如下定理:

定理 2 系统(3)是容许的, 如果存在非奇异对称矩阵P, 满足

$$E_{\mathrm{R}}PE_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}>0, \tag{16}$$

$$(\sum_{i=1}^{r}h_iA_i)P(\sum_{i=1}^{r}h_iA_i)^{\mathrm{T}}-EPE^{\mathrm{T}}<0. \tag{17}$$

证 由定理1的证明可知, 只需对式(4)进行证明即可. 由式(16), 可知

$$E_{\mathrm{L}}(E_{\mathrm{R}}PE_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}})E_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}=EPE^{\mathrm{T}}\geqslant 0.$$

证毕.

注 2 此定理给出了严格矩阵不等式形式的判别容许性的充分条件. 事实上, 这个充分性条件并不苛刻. 对于线性广义系统, 可以证明这种严格LMI条件是判别系统容许性的充要条件[6]. 在例1将说明此种严格LMI条件的有效性.

注 3 对应于注1中给出的容许性条件, 也可以得到具有严格矩阵不等式形式的容许性判据:

$$E_{\mathrm{L}}^{\mathrm{T}}PE_{\mathrm{L}}>0, \tag{18}$$

$$(\sum_{i=1}^{r}h_iA_i)^{\mathrm{T}}P(\sum_{i=1}^{r}h_iA_i)-E^{\mathrm{T}}PE<0. \tag{19}$$

注 4 矩阵的满秩分解是不唯一的, 但不同的分解之间有以下关系[15]:

设rank $A=r$, 若$A=BC=B_1C_1$均为A的满秩分解, 则存在$\theta\in C_r^{r\times r}$, 满足

$$B=B_1\theta, C=\theta^{-1}C_1.$$

由于θ为非奇异矩阵, 所以不同的满秩分解不会影响条件(16)和条件(18)的成立.

3.3 改进的开环系统容许条件(Improved admissible condition of open-loop system)

为了更便利的设计控制器, 本节将给出开环系统容许性条件的另外一种形式. 具体地, 有

定理 3　系统(3)是容许的, 如果存在非奇异对称矩阵P, 非奇异矩阵L, 满足

$$E_{\rm R}PE_{\rm R}^{\rm T}>0, \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix}(21)_{11} & (\sum\limits_{i=1}^{r}h_iA_i)L-L^{\rm T}\\ * & P-L-L^{\rm T}\end{bmatrix}<0, \tag{21}$$

其中

$$(21)_{11}=(\sum_{i=1}^{r}h_iA_i)L+L^{\rm T}(\sum_{i=1}^{r}h_iA_i)^{\rm T}-EPE^{\rm T}.$$

证　记$\varPi=[I\quad \sum\limits_{i=1}^{r}h_iA_i]$, 对于式(21), 可得

$$\varPi\begin{bmatrix}(21)_{11} & (\sum\limits_{i=1}^{r}h_iA_i)L-L^{\rm T}\\ * & P-L-L^{\rm T}\end{bmatrix}\varPi^{\rm T}=$$
$$[(22)_{11}\quad (22)_{12}]\varPi^{\rm T}=$$
$$(\sum_{i=1}^{r}h_iA_i)^{\rm T}P(\sum_{i=1}^{r}h_iA_i)-E^{\rm T}PE<0, \tag{22}$$

其中

$$(22)_{11}=$$
$$(\sum_{i=1}^{r}h_iA_i)L^{\rm T}(\sum_{i=1}^{r}h_iA_i)^{\rm T}+L^{\rm T}(\sum_{i=1}^{r}h_iA_i)^{\rm T}-EPE^{\rm T},$$
$$(22)_{12}=(\sum_{i=1}^{r}h_iA_i)P-L^{\rm T}-(\sum_{i=1}^{r}h_iA_i)L^{\rm T}.$$

由式(22)的推导过程可知, 定理3的条件能够保证系统(3)是容许的.　　证毕.

注 5　由隶属度函数的非负性, 可以得到定理3的LMI形式:

$$E_{\rm R}PE_{\rm R}^{\rm T}>0, \tag{23}$$

$$\begin{bmatrix}A_iL+L^{\rm T}A_i^{\rm T}-EPE^{\rm T} & A_iL-L^{\rm T}\\ * & P-L-L^{\rm T}\end{bmatrix}<0. \tag{24}$$

由于在定理3中引入了新的变量L, 从而得到了改进的开环系统容许性条件, 此条件为研究闭环系统的模糊控制器的设计奠定了基础.

4 闭环系统的鲁棒模糊控制器设计(Robust controller design for closed-loop system)

4.1 标称闭环系统的模糊控制器设计(Robust controller design for closed-loop nominal system)

考虑到开环系统本身的一些不利性质, 所以有必要通过引入反馈控制使闭环系统具有较好的性能. 对于如下闭环系统:

$$Ex(k+1)=\sum_{i=1}^{r}h_i(A_ix(k)+B_iu(k)), \tag{25}$$

引入如下模糊控制器

$$u(k)=\sum_{i=1}^{r}h_iK_ix(k). \tag{26}$$

结合控制律(26), 得到如下闭环系统

$$Ex(k+1)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_jA_{kij}x(k), \tag{27}$$

其中$A_{kij}=A_i+B_iK_j$.

由定理3, 可以推出如下的容许性条件:

定理 4　闭环系统(27)为容许的, 如果存在非奇异对称矩阵P, 非奇异矩阵L和控制增益$K_i, i=1,2,\cdots,r$, 满足

$$E_{\rm R}PE_{\rm R}^{\rm T}>0, \tag{28}$$

$$\begin{bmatrix}(29)_{11} & (\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{r}h_ih_jA_{kij})L-L^{\rm T}\\ * & P-L-L^{\rm T}\end{bmatrix}<0, \tag{29}$$

其中

$$(29)_{11}=(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_jA_{kij})L+$$
$$L^{\rm T}(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_ih_jA_{kij})^{\rm T}-EPE^{\rm T}.$$

以下给出定理4的LMI形式:

定理 5　闭环系统(27)为容许的, 如果存在非奇异对称矩阵P, 非奇异矩阵L和矩阵$H_i, i=1,2,\cdots,r$, 满足

$$E_{\rm R}PE_{\rm R}^{\rm T}>0, \tag{30}$$
$$\varXi_{ii}<0, \tag{31}$$
$$\varXi_{ij}+\varXi_{ji}<0, i<j, \tag{32}$$

其中:

$$\varXi_{ii}=\begin{bmatrix}G_{ii}+G_{ii}^{\rm T}-EPE^{\rm T} & G_{ii}-L^{\rm T}\\ G_{ii}^{\rm T}-L & P-L-L^{\rm T}\end{bmatrix},$$
$$\varXi_{ij}=\begin{bmatrix}G_{ij}+G_{ij}^{\rm T}-EPE^{\rm T} & G_{ij}-L^{\rm T}\\ G_{ij}^{\rm T}-L & P-L-L^{\rm T}\end{bmatrix},$$
$$\varXi_{ji}=\begin{bmatrix}G_{ji}+G_{ji}^{\rm T}-EPE^{\rm T} & G_{ji}-L^{\rm T}\\ G_{ji}^{\rm T}-L & P-L-L^{\rm T}\end{bmatrix},$$
$$G_{ii}=A_iL+B_iH_i, G_{ij}=A_iL+B_iH_j,,$$
$$G_{ji}=A_jL+B_jH_i.$$

局部控制增益为$K_i=H_iL^{-1}, i=1,2,\cdots,r$.

证　由$K_iL=H_i$, 考察定理4的式(29), 将其不

等号左边整理, 可得

$$\begin{bmatrix} (29)_{11} & (\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i h_j A_{kij})L - L^{\mathrm{T}} \\ * & P-L-L^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} =$$

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i h_j \begin{bmatrix} A_{kij}L+L^{\mathrm{T}}A_{kij}^{\mathrm{T}}- EPE^{\mathrm{T}} & A_{kij}L-L^{\mathrm{T}} \\ * & P-L-L^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} =$$

$$\sum_{i=1}^{r} h_i^2 \varXi_{ii} + \sum_{i=1}^{j-1}\sum_{j=2}^{r} h_i h_j (\varXi_{ij} + \varXi_{ji}),$$

而本定理的条件(31)和(32)就能够保证式(30)成立, 定理得证.

注 6 当$E=I$时, 定理5的条件(30)自然满足, 且由证明可知, 式(31)和式(32) 即为正常模糊离散系统的稳定性条件[16,17].

4.2 不确定闭环系统的鲁棒控制器设计(Robust controller design for closed-loop system with uncertainties)

在实际系统中, 由于模型误差、线性化、条件变化等因素均可引起系统矩阵的不确定性, 所以在实际系统中, 参数不确定性是广泛存在的. 当系统运行环境发生改变时, 总是希望所设计的控制器仍然可以使系统满足一定的性能, 这正是要考虑系统的不确定性来设计控制器的初衷. 本文所考虑的不确定模型为系统(2), 其中系统矩阵和控制输入矩阵同时带有不确定性. 对于如何设计具有鲁棒性的模糊控制器, 有以下定理.

定理 6 闭环系统(2)为鲁棒容许的, 如果存在正数$\varepsilon_i, \varepsilon_{ij}$,非奇异对称矩阵$P$, 非奇异矩阵$L$和矩阵$H_i, i=1,2,\cdots,r$, 满足

$$E_{\mathrm{R}}PE_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}} > 0, \tag{33}$$

$$\begin{bmatrix} (34)_{11}^{ii} & G_{ii}-L^{\mathrm{T}} & (34)_{13}^{ii} \\ * & P-L-L^{\mathrm{T}} & (34)_{13}^{ii} \\ * & * & -\varepsilon_i I \end{bmatrix} < 0, \tag{34}$$

$$\begin{bmatrix} (35)_{11}^{ij} & G_{ij}+G_{ji}-2L^{\mathrm{T}} & (35)_{13}^{ij} \\ * & 2P-2L-2L^{\mathrm{T}} & (35)_{13}^{ij} \\ * & * & -\varepsilon_{ij} I \end{bmatrix} < 0, i<j, \tag{35}$$

其中:

$$(34)_{11}^{ii} = A_iL + B_iH_i + L^{\mathrm{T}}A_i^{\mathrm{T}} + H_i^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}} - EPE^{\mathrm{T}} + \varepsilon_i MM^{\mathrm{T}},$$

$$(34)_{13}^{ii} = N_{ai}L + N_{bi}H_i,$$

$$(35)_{11}^{ij} = G_{ij} + G_{ji} + G_{ij}^{\mathrm{T}} + G_{ji}^{\mathrm{T}} - 2EPE^{\mathrm{T}} + \varepsilon_{ij}MM^{\mathrm{T}},$$

$$(35)_{13}^{ij} = N_{ai}L + N_{bi}H_j + N_{aj}L + N_{bj}H_i.$$

局部控制增益为$K_i = H_iL^{-1}, i=1,2,\cdots,r.$

证 由定理5, 闭环系统(2)为鲁棒容许的, 如果存在非奇异对称矩阵P, 在不确定性范围内满足

$$E_{\mathrm{R}}PE_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}} > 0, \tag{36}$$

$$\begin{bmatrix} (37)_{11}^{ii} & A_{\Delta i}L+B_{\Delta i}H_i-L^{\mathrm{T}} \\ * & P-L-L^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} < 0, \tag{37}$$

$$\begin{bmatrix} (38)_{11}^{ii} & G_{\Delta ij}+G_{\Delta ji}-2L^{\mathrm{T}} \\ * & 2P-2L-2L^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} < 0, i<j, \tag{38}$$

其中:

$$(37)_{11}^{ii} = A_{\Delta i}L + B_{\Delta i}H_i + L^{\mathrm{T}}A_{\Delta i}^{\mathrm{T}} + H_i^{\mathrm{T}}B_{\Delta i}^{\mathrm{T}} - EPE^{\mathrm{T}},$$

$$A_{\Delta i} = A_i + \Delta A_i, B_{\Delta i} = B_i + \Delta B_i,$$

$$(38)_{11}^{ii} = G_{\Delta ij} + G_{\Delta ji} + G_{\Delta ij}^{\mathrm{T}} + G_{\Delta ji}^{\mathrm{T}} - 2EPE^{\mathrm{T}},$$

$$G_{\Delta ij} = [A_i + \Delta A_i]L + [B_i + \Delta B_i]H_j.$$

将式(35)不等号左边的不确定性分离出来, 且利用引理1可得

$$\varXi_{ii} + \begin{bmatrix} \Delta A_iL+\Delta B_iH_i+ L^{\mathrm{T}}\Delta A_i^{\mathrm{T}}+H_i^{\mathrm{T}}\Delta B_i^{\mathrm{T}} & \Delta A_iL+\Delta B_iH_i \\ * & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\varXi_{ii} + \begin{bmatrix} MF[(34)_{13}^{ii}]^{\mathrm{T}} + (MF[(34)_{13}^{ii}]^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} & * \\ (MF[(34)_{13}^{ii}]^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\varXi_{ii} + \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} (34)_{13}^{ii} \\ (34)_{13}^{ii} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} + \left[\begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix} F \begin{bmatrix} (34)_{13}^{ii} \\ (34)_{13}^{ii} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} \leqslant$$

$$\varXi_{ii} + \varepsilon_i \begin{bmatrix} MM^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon_i^{-1}(39)_{\Delta ii} =$$

$$\begin{bmatrix} (34)_{11}^{ii} & G_{ii}-L^{\mathrm{T}} \\ G_{ii}^{\mathrm{T}}-L & P-L-L^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} + \varepsilon_i^{-1}(39)_{\Delta ii}, \tag{39}$$

其中

$$(39)_{\Delta ii} = \begin{bmatrix} (34)_{13}^{ii}[(34)_{13}^{ii}]^{\mathrm{T}} & (34)_{13}^{ii}[(34)_{13}^{ii}]^{\mathrm{T}} \\ (34)_{13}^{ii}[(34)_{13}^{ii}]^{\mathrm{T}} & (34)_{13}^{ii}[(34)_{13}^{ii}]^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}.$$

对式(34)运用Schur补引理, 可得式(39)<0, 则条件(37)成立. 同理由式(35)可推得条件(38)成立.

5 数值算例(Numerical examples)

例 1 考虑带有4个规则的三阶奇异系统[8]:

Rule$_1$: If x_1 is F_1, Then $Ex(k+1)=A_1x(k)$,

Rule$_2$: If x_1 is F_2, Then $Ex(k+1)=A_2x(k)$,

Rule_3: If x_1 is F_3, Then $Ex(k+1)=A_3x(k)$,

Rule_4: If x_1 is F_4, Then $Ex(k+1)=A_4x(k)$.

系统矩阵分别为

$$E=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},A_1=\begin{bmatrix}1&-0.5&0\\0.2&0.6&0\\0&0&2\end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}1&-0.2&0\\0.4&0.6&0\\0&0&2\end{bmatrix},A_3=\begin{bmatrix}-0.9&0.1&0\\-0.5&1&0\\0&0&2\end{bmatrix},$$

$$A_4=\begin{bmatrix}-0.2&-0.9&0\\-0.5&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

隶属度函数如图1所示.

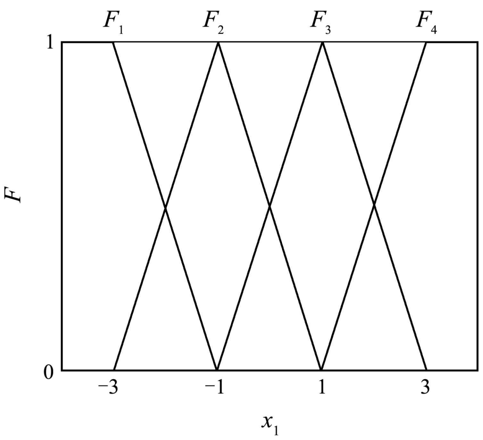

图 1 隶属度函数

Fig. 1 Membership function

运用本文定理3的LMI条件(23)和(24), 可求得

$$P=\begin{bmatrix}1.4037&0.5943&0.3122\\0.5943&1.4321&0.0055\\0.3122&0.0055&-0.3159\end{bmatrix}.$$

本文给出的判别容许性方法可直接用MATLAB求解, 避免了求解等式约束带来的不便, 而且相对于文献[8]给出的迭代映射法更加直观简洁.

以下仍然运用例1来说明本文给出的严格LMI形式的容许性判别条件的有效性. 系统矩阵分别为

$$E=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},A_1=\begin{bmatrix}1&-0.5&0\\0.2&0.6&0\\0&0&2\end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}1&-0.2&a\\0.4&0.6&0\\0&0&2\end{bmatrix},A_3=\begin{bmatrix}b&0.1&0\\-0.5&1&0\\0&0&2\end{bmatrix},$$

$$A_4=\begin{bmatrix}-0.2&-0.9&0\\-0.5&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

在A_2,A_3中各取一个元素作为参数, 分别记为a,b. 参数a,b的变动范围如图2所示.

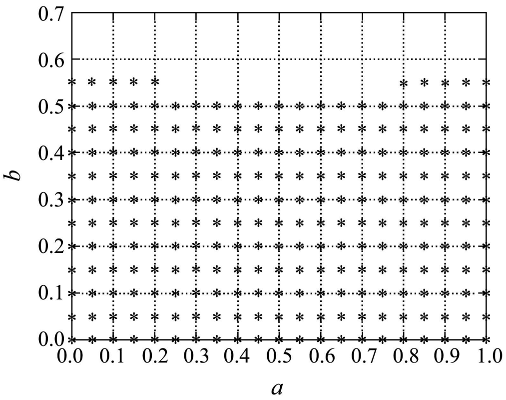

图 2 定理3可行域

Fig. 2 Feasible area of Theorem 3

其中用“*”号标记的点即为本文定理3的可行点. 可以看出, 本文所给严格LMI形式的容许性充分条件对于判别系统的容许性是有效的.

例 2 考虑两条模糊规则描述的不确定离散广义系统:

Rule_1: If $x_1(k)$ is N_1, Then

$Ex(k+1)=$

$(A_1+\Delta A_1)x(k)+(B_1+\Delta B_1)u(k)$,

Rule_2: If $x_1(k)$ is N_2, Then

$Ex(k+1)=$

$(A_2+\Delta A_2)x(k)+(B_2+\Delta B_2)u(k)$.

系统矩阵及不确定性表示如下:

$$E=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},A_1=\begin{bmatrix}0.8&0\\0.5&0\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}-0.3&0\\0.8&0\end{bmatrix},$$

$$B_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},B_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},M=\begin{bmatrix}0\\0.1\end{bmatrix},F=\sin k,$$

$$N_{a1}=[-3\ \ 0],N_{a2}=[1\ \ 0],N_{b1}=N_{b2}=0.$$

N_1,N_2的隶属度函数为

$$h_1=\frac{1}{1+\exp(-0.5(x_1(k)-0.3))},$$
$$h_2=1-h_1.$$

由定理6计算可得

$$K_1=[-8.4332\ \ 9.0306],$$
$$K_2=[-7.3332\ \ 9.0306].$$

另外, 考虑

$$\sum_{i=1}^{2} h_i[A_i+\Delta A_i] = \begin{bmatrix} 0.8h_1-0.3h_2 & 0 \\ (0.5+0.3\sin k)h_1+(0.8-0.1\sin k)h_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

由于矩阵$\sum_{i=1}^{2} h_i[A_i+\Delta A_i]$的第2行第2列的元素为0, 所以原开环不确定系统是非正则的. 通过对系统进行状态反馈控制, 使得闭环系统在不确定性范围内正则、因果且稳定. 系统的状态响应曲线如图3所示.

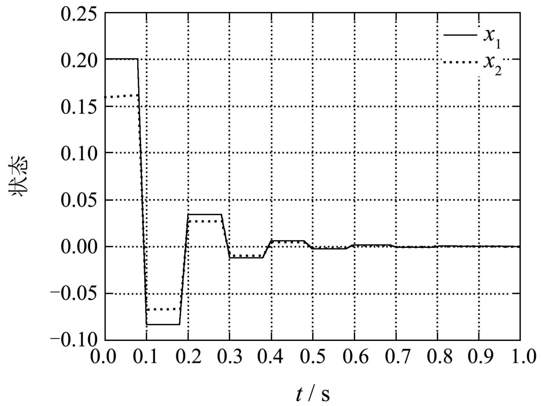

图3 系统状态响应

Fig. 3 System state response

注 7 文献[9]中通过矩阵范数之间的关系给出了一种判别系统容许性和求解鲁棒容许控制器的条件. 此方法的可行性由预先给出的Lyapunov函数保证, 但该Lyapunov函数具有较特殊的形式$V(x(k))=x^{\mathrm{T}}(k)E^{\mathrm{T}}E\,x(k)$, 即将通常需要进行求取的矩阵$P$取为单位矩阵$I$. 这种设置方法避免了求取非严格LMI, 却增加了方法的保守性(对于离散广义系统的矩阵P只要求为非奇异对称矩阵). 另外, 文献[9]中求解鲁棒容许控制器时, 要求系统状态矩阵与不确定矩阵范数之和必须小于1, 而对于例2, 虽然$\|A_1\|+\|\Delta A_1\|=1.2434>1$, 运用本文定理6仍可得到鲁棒容许控制器$\sum_{i=1}^{2} h_iK_ix(k)$.

6 结论(Conclusion)

本文研究了T-S模糊离散广义系统的容许性和鲁棒控制器设计问题, 通过引入自由的矩阵变量, 给出了新的容许性条件, 即不含有等式约束的严格LMI条件. 在此基础上, 进行了鲁棒控制器的设计, 解决了由于矩阵E的奇异性和矩阵P的不定性而带来的控制器设计的困难. 最后举例说明本文方法的实用性和有效性.

参考文献(References):

[1] XU S Y, YANG C W, NIU Y G, et al. Robust stabilization for uncertain discrete singular systems[J]. *Automatica*, 2001, 37(5): 769 – 774.

[2] LIN C, WANG Q G, LEE T H. Robust normalization and stabilization of uncertain descriptor systems with norm-bounded perturbations[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(4): 515 – 520.

[3] MASUBUCHI I. Output feedback controller synthesis for descriptor systems satisfying closed-loop dissipativity[J]. *Automatica*, 2007, 43(2): 339 – 345.

[4] IKEDA M, LEE T, UEZATO E. A strict LMI condition for H_2 control of descriptor systems[C] //*Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 2000, 601 – 604.

[5] ZHANG G M, JIA Y M. New results on discrete-time bounded red lemma for singular systems: strict matrix inequality conditions[C] //*Proceedings of the American Control Conference*. New York: IEEE, 2002, 634 – 638.

[6] ZHAI G S, NAOKI K, FREDRIK B, et al. Strict LMI conditions for stability and stabilization of discrete-time descriptor systems[C] //*Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Intelligent Control*. New York: IEEE, 2004, 495 – 499.

[7] TANIGUCHI T, TANAKA K, YAMAGUJI K, et al. Fuzzy descriptor systems: Stability analysis and design via LMIs[C] //*Proceedings of the American Control Conference*. New York: IEEE, 1999, 1827 – 1831.

[8] HUANG C P. Stability analysis of discrete singular fuzzy systems[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2005, 151(1): 155 – 165.

[9] WANG Y, ZHANG Q L, LIU X D. Robustness design of uncertain discrete-time fuzzy descriptor systems with guaranteed admissibility[C] //*Proceedings of American Control Conference*. New York: IEEE, 2002, 2, 1699 – 1704.

[10] 朱宝彦, 张庆灵, 佟绍成. 一类Takagi-Sugeno模糊离散广义系统的稳定性判据[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(1): 113 – 116.
(ZHU Baoyan, ZHANG Qingling, TONG Shaocheng. Stability criteria for a class of takagi-sugeno fuzzy discrete descriptor system[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(1): 113 – 116.)

[11] XU S Y, SONG B, LU J W, et al. Robust stability of uncertain discrete-time singular fuzzy systems[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2007, 158(20): 2306 – 2316.

[12] LEE H J , KAU S W, LEE C H, et al. H_∞ control for discrete-time fuzzy descriptor systems[C] //*Proceedings of IEEE International Conference on Systems, Man,and Cybernetics*. New York: IEEE, 2006, 5059 – 5064.

[13] 张庆灵, 杨冬梅. 不确定广义系统的分析与综合[M]. 沈阳: 东北大学出版社, 2003.

[14] XIE L H. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty[J]. *International Journal of Control*, 1996, 63(4): 741 – 750.

[15] 史荣昌. 矩阵分析[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1997.

[16] WU H N, CAI K Y. H_2 guaranteed cost fuzzy control design for discrete-time nonlinear systems with parameter uncertainty[J]. *Automatica*, 2006, 42(7): 1183 – 1188.

[17] CAO Y Y, FRANK P M. Robust H_∞ disturbance attenuation for a class of uncertain discrete-time fuzzy systems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2000, 8(4): 406 – 415.

作者简介:

袁宇浩 (1979—), 女, 讲师, 主要研究方向为智能控制、鲁棒控制, E-mail: yyhmds@sohu.com;

张广明 (1965—), 男, 教授, 主要研究方向为故障诊断、智能系统理论及应用、机电系统综合控制, E-mail: zgmchina@163.com.