

基于输入输出线性化的连续系统非线性模型预测控制

孔小兵, 刘向杰

(华北电力大学 控制与计算工程学院, 北京 102206)

摘要: 非线性约束预测控制关键是求得可行性优化解. 输入输出反馈线性化是非线性控制一种常用的方法, 其系统的初始线性输入约束转化成非线性基于状态的约束, 因而无法采用常规的二次规划(QP)求解优化问题. 针对连续状态空间模型系统, 本文提出迭代二次规划方法来寻求非线性优化解. 为了保证算法的收敛性, 系统加入另外一种迭代算法来保证其在整个预测时域上能得到可行解. 仿真控制结果表明了该方法的有效性.

关键词: 非线性; 预测控制; 连续系统; 输入输出反馈线性化

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Continuous-time nonlinear model predictive control with input/output linearization

KONG Xiao-bing, LIU Xiang-jie

(School of Control and Computer Engineering, North China Electric Power University, Beijing 102206, China)

Abstract: Obtaining a feasible optimal solution is the key issue in designing the constrained nonlinear predictive control. The input/output feedback linearization is a conventional method for this purpose. Because the original linear input constraints are converted to nonlinear and state-dependent constraints in this method, it makes the quadratic programming (QP) method inapplicable to obtain an optimal solution. To find the optimal solution for a state-space continuous-time system, we present an iterative quadratic program (QP) method. To guarantee its convergence, another iterative approach that can guarantee a feasible solution over the entire prediction horizon is incorporated. Simulation results of application to a continuous stirred tank reactor (CSTR) demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: nonlinear; predictive control; continuous-time system; input/output feedback linearization

1 引言(Introduction)

“模型预测控制”(model predictive control, MPC)采用显式过程模型预测对象未来响应, 控制器的设计直接考虑被控过程的输入、状态和输出的受限条件. 工业应用中的模型预测控制大部分都采用线性动态模型, 其主要原因在于线性经验模型可直接由过程测试数据辨识获得. Qin在有关模型预测控制的综述中^[1], 报告了4600余例商业应用, 这其中大部分都采用了线性模型, 而应用对象主要集中在冶炼、化工等过程.

然而许多实际系统存在着强非线性, 系统的动态随操作点变化而频繁变化. 线性模型在远离操作点时无法代表系统动态. 虽然模型预测控制中的非线性问题存在许多解决方法, 但从优化方式来讲可分为两种, 即“精确优化”和“近似优化”. 所谓“精确优化”是采用序列二次规划(sequential quadratic programming, SQP)技术, 该方法通常会导致二次规划的非凸问题, 而且计算量庞大, 尤其当控制维数增

加时计算量呈指数增加. 这不仅使得寻找优化解更加困难, 而且即便找到也难以达到全局优化解.

“近似优化法”成为近年来发展非线性模型预测控制的主要手段, 其核心思想是运用近似处理方法, 借助传统方法的优势, 最大限度保证控制系统品质, 而仍然能够实现系统的优化控制, 是为寻求优化控制的一种折中. 文献[2]精确实现当前时刻控制量的约束而近似实现未来时刻控制量的约束, 因而控制变量的个数仅仅等同于输入变量的个数, 而不是输入个数乘以控制时域. 文献[3]把第1步预测中的线性约束关系扩展到整个控制时域上, 文献[4]采用模糊神经网络模型实现非线性系统的约束预测控制. 文献[5]基于K-T条件, 构造非线性系统的监督预测控制.

非线性预测控制解优化的突出难点在于约束条件的存在. 微分几何中的输入输出线性化是处理非线性系统的有效手段之一. 在预测控制中, 该方法可将一类非线性系统转化为线性系统, 但同时使得约

束条件变为非线性且依赖于状态变化,这种非线性的约束使得常规的二次规划方法仍然难以实施.文献[6]基于仿射型离散神经网络模型,采用自适应与迭代学习控制克服系统与约束的非线性.

相比于离散系统,连续系统的输入输出反馈线性化方法已发展的较为成熟.本文针对连续系统采用输入输出反馈线性化实现非线性预测控制.在非线性的约束条件下,所构造的收敛算法保证约束解的可行解.针对数字例子和工业过程的仿真结果证明了该方法的有效性.

2 输入-输出反馈线性化(Input/output feedback linearization)

输入-输出反馈线性化(IOFL)是通过构造稳定的状态反馈控制律,使得闭环系统具有理想的线性输入-输出特性^[7].

考虑如下单输入单输出仿射型状态空间模型:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = f(\bar{x}) + g(\bar{x})u, \\ y = h(\bar{x}), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ 是状态变量, y 是输出, f, g 和 h 是域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上充分光滑的向量场. 映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 和 $g: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是 D 上的向量场.

定义 1 (相对阶) 对于单输入单输出系统(1), 当 $\bar{x}_0 \in D_0, D_0 \subset D$ 时, 如果存在整数 $\gamma, 1 \leq \gamma \leq n$ 使得

$$L_g L_f^i h(\bar{x}_0) \equiv 0, \quad i = 0, \dots, \gamma-2; \quad L_g L_f^{\gamma-1} h(\bar{x}_0) \neq 0,$$

其中: 符号 $L_f^i h(\bar{x})$ 表示函数 $h(\bar{x})$ 沿光滑向量场 f 方向的 i 阶李导数, $L_f h(\bar{x})$ 表示函数 $h(\bar{x})$ 沿光滑向量场 f 方向的一阶李导数, 则称系统在点 \bar{x}_0 具有严相对阶 γ .

如果相对阶 $\gamma = n$, 在 \bar{x}_0 的邻域 D 内存在微分同胚映射: $\Phi: \bar{x} \rightarrow x = [h \quad L_f h \quad \dots \quad L_f^{\gamma-1} h]^T$, 微分同胚变换 Φ 使原系统(1)转化为如下新系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \\ \vdots \\ \dot{x}_n = b(x) + a(x)u, \\ y = x_1, \end{cases} \quad (2)$$

其中: $a(\bar{x}) = L_g L_f^{\gamma-1} h(\bar{x}), b(\bar{x}) = L_f^\gamma h(\bar{x})$, 在新坐标 X 下可表示为 $a(x), b(x)$.

反馈规律可写为

$$u = \frac{1}{a(x)}[-b(x) + v]. \quad (3)$$

所得新的线性系统可以写为如下标准格式:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bv, \\ y = Dx, \end{cases} \quad (4)$$

其中:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = [1 \ 0 \ \dots \ 0].$$

3 线性控制结构(Linear control structure)

针对非线性系统在反馈线性化后得到线性状态空间方程(4), 可直接应用线性预测控制理论^[8]. 系统(4)离散化可得:

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d v(k), \quad (5)$$

$$y(k) = C_d x(k), \quad (6)$$

其中: v 是输入, y 是对象输出, x 是 n 维的状态向量. 等式(5)两侧求差分可得:

$$x(k+1) - x(k) = A_d(x(k) - x(k-1)) + B_d(v(k) - v(k-1)). \quad (7)$$

如下定义状态增量:

$$\Delta x(k+1) = x(k+1) - x(k),$$

$$\Delta x(k) = x(k) - x(k-1).$$

控制增量如下定义: $\Delta v(k) = v(k) - v(k-1)$. 然后, 利用预测模型(5)和(6), 可得前 j 步状态变量预测值:

$$x(k+j) = x(k+j-1) + A_d \Delta x(k+j-1) + B_d \Delta v(k+j-1), \quad (8)$$

其中 $j = 1, \dots, N_p, N_p$ 是预测时域. 之后, 可以得到如下预测变量值:

$$x(k+1|k) = x(k) + A_d \Delta x(k) + B_d \Delta v(k), \quad (9)$$

$$x(k+2|k) =$$

$$x(k) + (A_d + A_d^2) \Delta x(k) +$$

$$(I + A_d) B_d \Delta v(k) + B_d \Delta v(k+1),$$

\vdots

$$x(k+N_c-1|k) =$$

$$x(k) + \left(\sum_{i=1}^{N_c-1} A_d^i \right) \Delta x(k) +$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N_c} A_d^{i-1} \right) B_d \Delta v(k) +$$

$$\dots + B_d \Delta v(k+N_c-2),$$

其中 N_c 是控制时域.

定义向量

$$X = [x(k) \quad x(k+1|k) \quad \dots \quad x(k+N_c-1|k)]^T,$$

$$\Delta V = [\Delta v(k) \quad \Delta v(k+1|k) \quad \dots \quad \Delta v(k+N_c-1|k)]^T.$$

可得整个控制时域上的状态预测值

$$X = \tilde{A} \Delta V + \gamma, \quad (11)$$

其中:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ B_d & 0 & \cdots & 0 \\ (A_d + I)B_d & B_d & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\sum_{i=1}^{N_c-1} A_d^{i-1})B_d & (\sum_{i=1}^{N_c-2} A_d^{i-1})B_d & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k) + A_d \Delta x(k) \\ x(k) + (\sum_{i=1}^2 A_d^i) \Delta x(k) \\ \vdots \\ x(k) + (\sum_{i=1}^{N_c-1} A_d^i) \Delta x(k) \end{bmatrix}.$$

由已定义的 $x(k)$ 和 $v(k)$ 的增量, 可得状态空间等式(5)的增量:

$$\Delta x(k+1) = A_d \Delta x(k) + B_d \Delta v(k). \quad (12)$$

下一步是把输出 $y(k)$ 与 $\Delta x(k)$ 联系起来, 为此定义一系列新的状态变量: $x_u(k) = [\Delta x(k)^T \ y(k)^T]^T$, 其中上标T表示矩阵转置. 注意到

$$\begin{aligned} y(k+1) - y(k) &= C_d(x(k+1) - x(k)) = \\ C_d \Delta x(k+1) &= \\ C_d A_d \Delta x(k) + C_d B_d \Delta v(k). \end{aligned} \quad (13)$$

式(12)和式(13)联合引出下面的状态空间模型:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix}}_{x_u(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_d & 0_d^T \\ C_d A_d & 1 \end{bmatrix}}_{A_u} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x(k) \\ y(k) \end{bmatrix}}_{x_u(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_d \\ C_d B_d \end{bmatrix}}_{B_u} \Delta v(k),$$

$$y(k) = \underbrace{[0_d \ 1]}_{C_u} \begin{bmatrix} \Delta x(k) \\ y(k) \end{bmatrix}, \quad (14)$$

其中 $0_d = [0 \ 0 \ \cdots \ 0]$. 系统 (A_u, B_u, C_u) 称为增广模型.

假设在 k 采样时刻($k > 0$), 状态变量 $x_u(k)$ 可测, 定义未来的控制量

$$\Delta v(k), \Delta v(k+1), \cdots, \Delta v(k+N_c-1),$$

其中 N_c 称为控制时域, 是跟踪未来给定值的控制量个数. 定义预测时域为 N_p , 利用已知的状态信息 $x_u(k)$, 可以定义未来的状态变量为:

$$x_u(k+1|k), \cdots, x_u(k+m|k), \cdots, x_u(k+N_p|k),$$

其中 $x_u(k+m|k)$ 是基于已知的状态信息 $x_u(k)$ 得出的在 $k+m$ 时刻的状态预测值.

基于状态空间模型 (A_u, B_u, C_u) , 未来的状态变量可以计算如下:

$$\begin{aligned} x_u(k+1|k) &= A_u x_u(k) + B_u \Delta v(k), \quad (15) \\ x_u(k+2|k) &= \\ &A_u x_u(k+1|k) + B_u \Delta v(k+1) = \\ &A_u^2 x(k) + A_u B_u \Delta v(k) + B_u \Delta v(k+1), \\ &\vdots \\ x_u(k+N_p|k) &= \\ &A_u^{N_p} x_u(k) + A^{N_p-1} B_u \Delta v(k) + \\ &A^{N_p-2} B_u \Delta v(k+1) + \cdots + \\ &A^{N_p-N_c} B_u \Delta v(k+N_c-1). \end{aligned} \quad (16)$$

从上面的状态变量预测值可以推导出输出变量预测值:

$$\begin{aligned} y(k+1|k) &= C_u A_u x_u(k) + C_u B_u \Delta v(k), \quad (17) \\ y(k+2|k) &= \\ &C_u A_u^2 x_u(k) + C_u A_u B_u \Delta v(k) + \\ &C_u B_u \Delta v(k+1), \\ y(k+3|k) &= \\ &C_u A_u^3 x_u(k) + C_u A_u^2 B_u \Delta v(k) + \\ &C_u A_u B_u \Delta v(k+1) + C_u B_u \Delta v(k+2), \\ &\vdots \\ y(k+N_p|k) &= \\ &C_u A_u^{N_p} x_u(k) + C_u A^{N_p-1} B_u \Delta v(k) + \\ &C_u A_u^{N_p-2} B_u \Delta v(k+1) + \cdots + \\ &C_u A_u^{N_p-N_c} B_u \Delta v(k+N_c-1). \end{aligned} \quad (18)$$

由此可以看出所有的输出预测值都基于当前时刻的状态变量 $x_u(k)$ 和未来的控制变量 $\Delta v(k+i)$, 其中 $j = 0, 1, \cdots, N_c - 1$. 定义向量

$$Y = [y(k+1|k) \ y(k+2|k) \ \cdots \ y(k+N_p|k)],$$

在单入单出系统中 Y 是 N_p 维的. 从式(10)到式(11)可以写成矢量形式:

$$Y = F x_u(k) + \Phi \Delta V, \quad (19)$$

其中:

$$F = \begin{bmatrix} C_u A_u \\ C_u A_u^2 \\ C_u A_u^3 \\ \vdots \\ C_u A_u^{N_p} \end{bmatrix},$$

$$c = [\bar{v}_k - v(k-1) \cdots \bar{v}_{k+N_c-1} - v(k-1) \\ v(k-1) - \underline{v}_k \cdots v(k-1) - \underline{v}_{k+N_c-1}].$$

式(27)是关于 $U, \Delta V$ 的隐函数. 虽然无法求解解析表达式, 但当已知 U 时, 由式(27)可通过数值方法求得 ΔV , 故符号上将 ΔV 写成关于 U 的函数, 并带入式(31), 可以转换为以 U 的变量的表达式, 联合可推导得出

$$C^T \Delta V(k) \leq c(X(U(k)))^T, \quad (32)$$

迭代(QP)算法具体步骤如下:

Step 1 本文在实际输入约束范围内初始化 $c(X(U^0(k)))$.

Step 2 在约束 $C^T \Delta V^i(k) \leq c(X(U^{i-1}(k)))^T$ 下, 通过二次规划求解 $\Delta V^i(k)$.

Step 3 计算 $c(X(U^i(k)))$.

Step 4 测试 $C^T \Delta V^i(k) \leq c(X(U^i(k)))^T$ 是否成立, 如果成立, 迭代结束; 否则, $i = i + 1$, 转向 Step 2.

如果初始值选得恰当, 迭代二次规划算法能有效解决优化问题. 但是, 它本质上难以保证可行解的收敛性, 为此需采用如下迭代算法.

4.3 约束线性化(Linearization of constraints)

为了解决收敛性问题, 必须对约束进行线性化展开. 假定工作点为 U_0 , 忽略高阶项泰勒展开形式为:

$$\Delta V = \Delta V_0 + g_B[U_0](U - U_0), \quad (33)$$

其中 $(N_c \times N_c)$ 维矩阵 $g_B[U_0]$ 代表式(27)中 V 对 U 在工作点的一阶导数. 式(27)中, 若 $U = U_0$, 对应可得 $\Delta V = \Delta V_0$. 这样, 控制序列 U 就可以明确地以 ΔV 的线性形式表达:

$$U = g_B^{-1}[U_0] \Delta V + U_0 - g_B^{-1}[U_0] \Delta V_0, \quad (34)$$

那么整个优化问题可定义为使目标函数(21)最小

$$\min_{\Delta V} J(\Delta V) = \min_{\Delta V} \left\{ \frac{1}{2} \Delta V^T H \Delta V + C^T \Delta V \right\}, \quad (35)$$

且满足如下的线性约束: $\underline{U} \leq M \Delta V + m_0 \leq \bar{U}$, 其中 $H = \Phi^T \Phi + \bar{R}, C = -\Phi^T(W - Fx(k))$,

$$M = g_B^{-1}[U_0], \quad (36)$$

$$m_0 = U_0 - g_B^{-1}[U_0] \times \Delta V_0. \quad (37)$$

为了解决收敛问题, 以上优化问题可以改为下式:

$$\min_{\Delta V} J(\Delta V) = \min_{\Delta V} \left\{ \frac{1}{2} \Delta V^T H \Delta V + C^T \Delta V \right\}, \quad (38)$$

且满足线性约束

$$\underline{U} \leq M^\alpha \Delta V + m_0^\alpha \leq \bar{U}, \quad (39)$$

其中 $0 < \alpha < 1$ 是减小系数. 定义式(38)的优化解: $\Delta V^* = \arg \min_{\Delta V} J(\Delta V)$. 因为在优化问题中使用的约束是近似约束, 所以求解的实际对象输入序列可

能超出原始约束, 为此采用如下处理方法:

定义 $U_l^* = M^\alpha \Delta V^* + m_0^\alpha$ 为线性控制序列, 式(39)中 $f_v(\Delta V^*) - G_u[U_{nl}^* \Delta V^*] = 0$ 中得出的非线性控制序列.

要保证非线性控制序列 U_{nl}^* 不违反原始约束, 即

$$\underline{U} \leq U_{nl}^* \leq \bar{U}. \quad (40)$$

如果上述不等式成立, 考虑线性化约束的优化问题得到的解就是可行解. 相反, 如果上述不等式不成立, 优化解就不能作为可行解, 必须另选新的初始值重新进行优化. 初始值的优化问题可以通过迭代(QP)求解.

因而迭代过程改变了线性化约束(39)使得到的非线性控制序列 U_{nl}^* 等于 U_0 . 如果 U_0 选的恰当, U_{nl}^* 一定收敛于可行解.

4.4 算法步骤(The steps of algorithm)

把保证收敛性的迭代算法和迭代(QP)算法相结合, 整体算法步骤如下:

Step 1 $i = 0$.

Step 2 如果 $N - i < 0$, 转到 Step 8.

Step 3 确保新的工作点的可行性 $\underline{U} \leq U_i \leq \bar{U}$.

Step 4 在 U_i 点解 $\Delta V_{i+1}^* = \arg \min_{\Delta V} J(\Delta V)$ 约束于 $C^T \Delta V_{i+1}^* \leq c(X(U_i))^T$.

Step 5 检验 ΔV_{i+1}^* 是否违反约束, 如果

$$C^T \Delta V_{i+1}^* \leq c(X(U_{i+1}))^T \Rightarrow \text{END},$$

其中 $U_{i+1} = U_{nl}^*$, 是从式 $f_v(\Delta V_{i+1}^*) - G_u[U_{nl}^* \Delta V_{i+1}^*] = 0$ 中计算得出的, 是非线性控制序列.

Step 6 $i = i + 1$, 转到 Step 2.

Step 7 $U_0 = U_i, \Delta V_0 = \Delta V_N^*$. 按照式(23)和(24)求出 M 和 m_0 .

Step 8 $\alpha_{i-1} = 1$.

Step 9 实施减小系数 $\alpha: \alpha_i = \alpha_{i-1} \times \lambda$.

Step 10 在 U_0 处新的线性化约束是:

$$\underline{U} \leq M^{\alpha_i} \Delta \tilde{V}_{i+1}^* + m_0^{\alpha_i} \leq \bar{U}.$$

Step 11 在新的线性化约束下解二次规划

$$\Delta V_{i+1}^* = \arg \min_{\Delta V} J(\Delta V).$$

Step 12 计算 U_{nl}^* , 并测试它们是否超出原始的约束, 如果 $(\underline{U} \leq U_{nl}^* \leq \bar{U}) \Rightarrow \text{End}$.

Step 13 $i = i + 1$, 转到 Step 9.

在每一采样时刻, 算法的性能取决于这两个参数: N 为二次规划算法的迭代次数; λ 为保证收敛算法的衰减系数. 迭代算法的收敛速度依赖于参数 α 的减小速度, 即参数 $0 < \lambda < 1$.

初始值 U_0 的选择对于寻求优化解、降低计算负担具有重要作用, 选择依据为: 假设 k 时刻的输入序

列制为

$$U_{nl}^* = [u(0) \ u(1) \ \dots \ u(N_c - 1)]^T, \quad (41)$$

则 $k + 1$ 时刻的初始值 U_0 选择为

$$U_0 = [u(1) \ \dots \ u(N_c - 1) \ 0]^T, \quad (42)$$

也即选择上一时刻最终得出的控制序列的后 $N_c - 1$ 项再补零.

5 仿真例子(Simulation examples)

本文针对两个例子来分析控制器的实施和性能. 例1是一个状态空间方程的数字例子, 例2是化工过程的控制问题.

5.1 数字例子(Numerical example)

状态空间模型如下:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 = -3\bar{x}_1^2\bar{x}_2 - \bar{x}_1^3 \sin \bar{x}_2 + u, \\ y = \bar{x}_1. \end{cases} \quad (43)$$

输入约束为

$$-0.5 \leq u \leq 0.5. \quad (44)$$

由等式(3)可推出如下状态反馈律:

$$v = u + (-3x_1^2x_2 - x_1^3 \sin x_2), \quad (45)$$

状态反馈后新的线性模型如下:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (46)$$

选择 $N_p = 8, N_c = 5$, 采样周期 $\tau = 0.1 s$. 图1是利用本文中提出的算法进行闭环单位阶跃响应. 从图1可以看出该算法能有效保证对象实际输入不超出定义的约束. 系统在3s内达到稳定且没有明显超调.

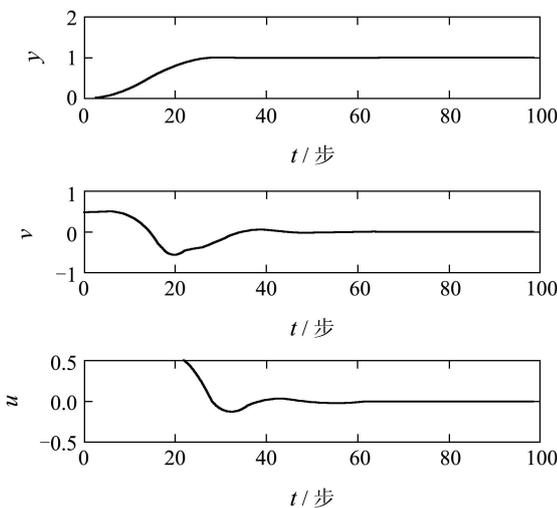


图1 反馈线性化MPC策略下单位阶跃响应

Fig. 1 The closed-loop response for a step signal under the NMPC

图2显示了在每步优化所用的迭代次数, 在初始时刻迭代次数为65次, 但随后迅速收敛, 最后达到迭代次数仅为1次.

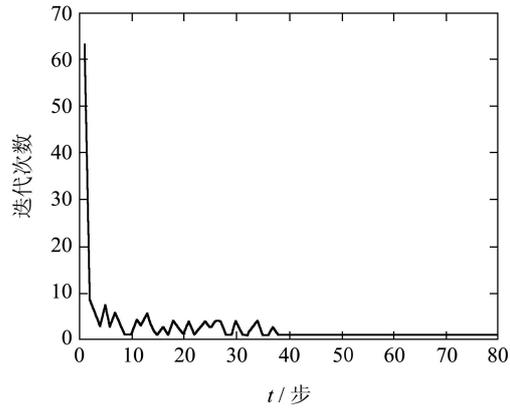


图2 每步优化的迭代次数

Fig. 2 The number of iterations at each optimization step

仿真随后在不同预测时域下进行, 其结果列于表1. 由表1看出, 随着预测时域的增大, 控制性能得到提高, 计算负担也相应增大. 这反映了非线性预测控制中改善控制性能与减小计算负担之间的矛盾.

表1 不同预测时域下的控制性能比较

Table 1 The comparison of control performance at different prediction horizon

| 预测时域 | 计算负担 | 误差平方和 |
|------|--------|---------|
| 8 | 1.0469 | 11.4042 |
| 10 | 1.1875 | 11.4036 |
| 12 | 1.2813 | 11.4032 |

5.2 搅拌反应器控制问题(Control problem of continuous stirred tank reactor)

搅拌反应器是化学工业中普遍存在的一类复杂过程, 具体结构如图3所示.

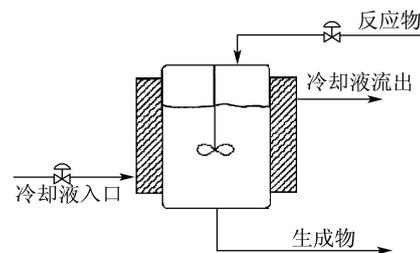


图3 搅拌反应器

Fig. 3 Continuous stirred tank reactor

本文中讨论的CSTR问题是一个一阶的不可逆的放热反应过程, 而反应器温度直接影响生成物浓度, 所以可以通过调节冷却液的温度来跟踪给定的生成物浓度. 该过程可由以下代表质量和能量平衡的非

线性微分方程描述^[9]:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + D_\alpha \cdot \exp\left(\frac{x_2}{1+x_2/\gamma}\right), \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2(1+\beta) + H \cdot D_\alpha \cdot \\ (1-x_1) \cdot \exp\left(\frac{x_2}{1+x_2/\gamma}\right) + \beta u, \\ y = x_1, \end{cases} \quad (47)$$

其中: 两个状态变量 x_1 和 x_2 分别代表生成物浓度和反应器温度, 控制变量是冷却水温度, D_α, β 和 γ 是系统中的常量. 控制目标是通过改变冷却水温度跟踪给定的生成物浓度. 存在微分同胚变换 Φ :

$$\Phi : x \rightarrow \xi = [x_1 - x_1 + D_\alpha \cdot \exp\left(\frac{x_2}{1+x_2/\gamma}\right)]^T. \quad (48)$$

本系统静态反馈律如下:

$$v = au + b,$$

其中:

$$\begin{aligned} a &= \beta(\xi_1 + \xi_2) \cdot \left(1 - \frac{1}{r} \ln \frac{\xi_1 + \xi_2}{D_\alpha}\right)^2, \\ b &= \xi_1 - (\xi_1 + \xi_2) + (\xi_1 + \xi_2) \cdot \\ &\quad \left[\frac{\ln \frac{\xi_1 + \xi_2}{D_\alpha}}{1 - \frac{1}{r} \ln \frac{\xi_1 + \xi_2}{D_\alpha}} (1 + \beta) + \right. \\ &\quad \left. H \cdot (1 - \xi_1)(\xi_1 + \xi_2) \right], \end{aligned}$$

反馈线性化后得到的新的线性系统是

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v, \\ y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (49)$$

取约束:

$$\begin{aligned} -3 \leq u \leq 3, \quad r, D_\alpha, H = 1, \\ \beta = 0.01, N_p = 10, N_c = 5. \end{aligned}$$

图4是系统单位阶跃响应仿真结果. 从仿真结果可以看出, 控制变量没有超出约束. 系统在30步达到稳定且没有明显超调.

以下进行仿真对比研究. 如前所述, 非线性模型预测控制存在两种典型方法, 一种是非线性序列二次规划法, 另一种是线性近似方法, 即一步约束算法, 把当前时刻的约束作为整个控制时域上约束^[3]. 本文所构造的输入输出线性化算法与这两种算法进行了比较, 图5给出3种控制策略在

$$N_c = 5, N_p = 10$$

时的仿真结果比较. 从图5中可以看出, 本文提出的

基于IOFL的线性MPC策略跟踪效果明显优于其它两种算法.

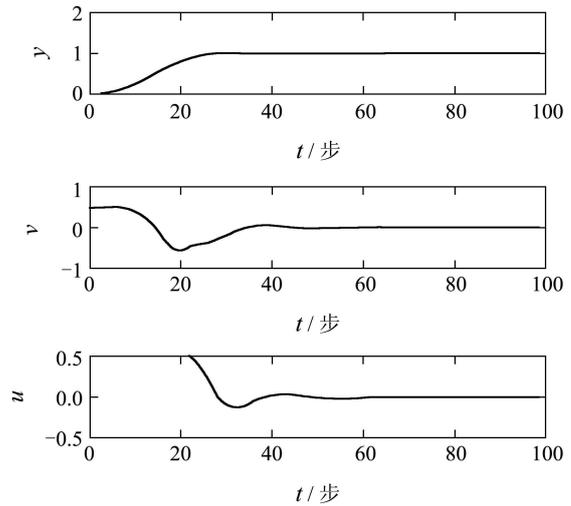


图 4 阶跃响应下的系统输出和控制量

Fig. 4 The system output and the control under step changes in the reference signal

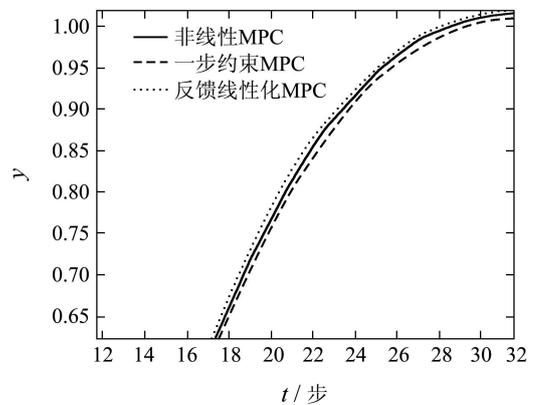


图 5 3种控制策略的阶跃响应

Fig. 5 The comparison of the three responses

在CSTR控制过程中另一关注问题的是计算负担问题. 预测控制系统中, 提高预测时域可改善控制性能, 但是相应的计算负担也增大较多, 尤其是对非线性系统. 以下就控制性能和计算负担两个方面对3种控制器进行比较, 即考察整个仿真时域上输出值的误差平方和以及所需的相对优化时间. 表2显示不同预测时域时3种控制策略的对比结果. 3种控制策略在整个预测时域上都得到了可行解, 它们的闭环控制性能相似, 但是如图6所示一步约束策略所需计算负担较小. 随着预测时域的增大, SQP策略的计算时间增大较明显, 一步约束和本文所提出的基于反馈线性化MPC策略计算时间增加较少, 这归因于有效的迭代过程. 从图6可明显看出, 综合考虑计算负担和控制性能, 本文提出的反馈线性化MPC最优.

表2 整个仿真的计算负担和整个仿真时域的误差平方和(SSE)

Table 2 Cputime of the entire simulation and sum squared error(SSE) over the entire simulation

| 预测时域 | 计算负担 | | | 误差平方和 | | |
|------|---------|----------|---------|---------|----------|---------|
| | 一步约束MPC | 反馈线性化MPC | 非线性MPC | 一步约束MPC | 反馈线性化MPC | 非线性MPC |
| 10 | 0.1563 | 0.6563 | 61.4375 | 11.5181 | 11.4042 | 11.4481 |
| 11 | 0.1677 | 0.9688 | 61.6094 | 11.5181 | 11.4042 | 11.4481 |
| 12 | 0.1719 | 1.0156 | 61.7813 | 11.5180 | 11.4042 | 11.4480 |
| 13 | 0.1875 | 1.0469 | 61.9375 | 11.5178 | 11.4038 | 11.4478 |
| 14 | 0.2031 | 1.1094 | 62.4375 | 11.5177 | 11.4036 | 11.4477 |
| 15 | 0.2500 | 1.2500 | 62.5625 | 11.5176 | 11.4035 | 11.4476 |

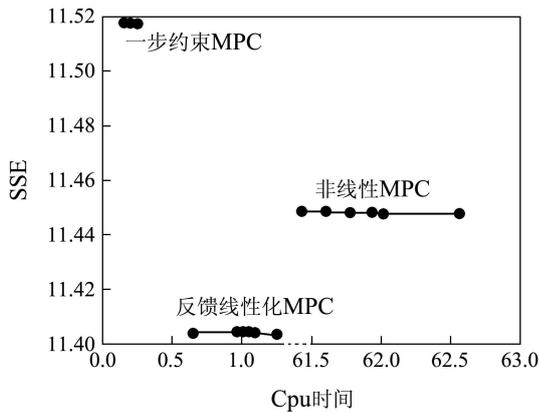


图6 控制性能比较

Fig. 6 The comparison of control performance

6 结论(Conclusion)

预测控制广泛应用于工业过程,但目前大多数应用基于线性模型.在当输出远离线性工作点,尤其又存在约束时,预测控制性能会变差.本文针对非线性对象,将输入输出反馈线性化法与预测控制技术相结合避免非线性优化问题.对连续时间系统,通过迭代优化可以得到一个可行解.选择恰当的初始值,可以大大降低计算负担.在CSTR的仿真中详细比较了整个仿真过程中不同控制策略的计算负担和控制误差.本文的方法实质是采用线性优化技术,避免了复杂的非线性优化问题.

参考文献(References):

[1] QIN S J, BADGWELL T A. A survey of industrial model predictive control technology[J]. *Control Engineering Practice*, 2003, 11(1):

- 733 – 764.
- [2] ZHENG A. A computationally efficient nonlinear model predictive control algorithm[C] // *Proceeding of American Control Conference*. Albuquerque, NM: IEEE, 1997: 1623 – 1627.
- [3] KURTZ M J, ZHU G Y, HENSON M A. Constrained output feedback control of a multivariable polymerization reactor[J]. *IEEE Transactions on Control System Technology*, 2000, 8(1): 87 – 97.
- [4] LIU X J, GUAN P, CHAN C W. Nonlinear multivariable power plant coordinate control by constrained predictive scheme[J]. *IEEE Transactions on Control System Technology*, 2010, 18(5): 1116 – 1125.
- [5] LIU X J, NIU L X, LIU J Z. Nonlinear multivariable supervisory predictive control[C] // *Proceedings of American Control Conference*. St. Louis: IEEE, 2009: 2779 – 2784.
- [6] BOTTO M A, van den BOOM T J J, KRIJGSMAN A, et al. Predictive control based on neural network models with I/O feedback linearization[J]. *International Journal of Control*, 1999, 72(17): 1538 – 1554.
- [7] 陈思哲, 吴捷, 姚国兴, 等. 基于微分几何的风力发电机组恒功率控制[J]. *控制理论与应用*, 2008, 25(2): 336 – 340. (CHEN Sizhe, WU Jie, YAO Guoxing, et al. Power limitation control of wind turbine system based on differential geometry theory[J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(2): 336 – 340.)
- [8] WANG L P. *Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB*[M]. New York: Springer, 2009.
- [9] NAGRATH D, PRASAD V, BEQUETTE B W, et al. Model predictive control of open-loop unstable cascade systems[C] // *Proceedings of American Control Conference*. New York: IEEE, 2000: 3747 – 3752.

作者简介:

孔小兵 (1987—), 女, 博士研究生, 主要从事非线性预测控制理论、方法及应用等方面的研究, E-mail: kongxiaobing@ncepu.edu.cn;

刘向杰 (1966—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事非线性预测控制理论、方法及应用、复杂工业系统的智能化控制、电站节能与优化控制等方面的研究, E-mail: liuxj@ncepu.edu.cn.